Corpi rigidi (FMUV 8.1,8.2)

Schematizzazione di corpo rigido:

le distanze tra due punti qualunque sono costanti

gradi di libertà di un corpo rigido:

1. posizionare un qualunque punto del corpo nello spazio: 3 coordinate
2. il luogo di un secondo punto con distanza costante è una superficie sferica: la posizione del secondo punto ha 2 gradi di libertà
3. rimane ora solo una possibile rotazione intorno all'asse individuato dai due primi punti: 1 ulteriore grado di libertà
4. Totale: 6 gradi di libertà (lo stesso numero delle eq. cardinali)

Le tre operazioni elencate corrispondono al posizionamento di una terna cartesiana ortogonale solidale col corpo rigido

la cinematica del corpo rigido è quindi definita dalla posizione dell'origine della terna (p. es. il c.d.m. del corpo) e dalla sua rotazione; in questa terna i punti del corpo sono fermi.

La relazione generale tra le velocità, $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_\tau$, si riduce quindi alla sola velocità di trascinamento:

$$\vec{v}_i' = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)$$

Moti puramente traslatori (FMUV 8.2.1)

Se il corpo non ruota rispetto ad un riferimento inerziale si ha:

$$\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{V}_C$$

Tutti i punti del sistema hanno la stessa velocità, che è quindi anche quella del c.d.m.

La quantità di moto totale, come per qualunque sistema, è data da $\vec{Q} = M\vec{v}_C$

Il momento angolare rispetto al c.d.m. è nullo nel riferimento del c.d.m.

$$\vec{v}\,'_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\,'_C = \sum \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{v}\,'_i = 0$$

e, per la proprietà del momento angolare rispetto al c.d.m. di essere un momento angolare intrinseco, ossia indipendente dal sistema di riferimento in cui è calcolato, è nullo rispetto a qualunque sistema di riferimento inerziale:

$\vec{P}_C = \vec{P}\,'_C = 0$

Il momento angolare totale rispetto ad un polo qualunque è quindi dato da

$$\vec{P}_\Omega = \vec{P}_C + (\vec{r}_C - \vec{r}_\Omega) \times \vec{Q} = (\vec{r}_C - \vec{r}_\Omega) \times \vec{Q}$$

ossia è il momento angolare rispetto al polo che avrebbe il c.d.m. se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema.

Un corpo rigido che non ruota intorno al c.d.m. è quindi del tutto equivalente ad un punto materiale.

Moti rotatori con asse fisso **(FMUV 8.2.2)**

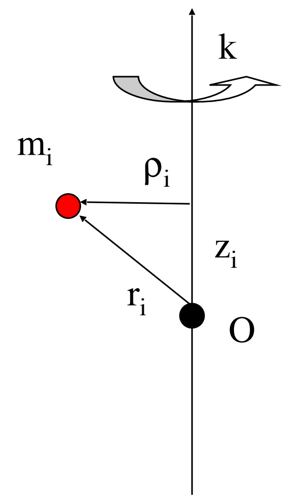
In questo caso conviene scegliere come origine comune del riferimento inerziale e del riferimento rotante un punto dell'asse,

$\mathrm{O} = \mathrm{O}' = \Omega, \qquad r_\Omega = 0,\ v_\Omega = 0$, per cui $\vec{v}_i = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i$

La quantità di moto del sistema $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ è nulla se il c.d.m. è anch'esso sull'asse, altrimenti è necessaria una forza esterna (esercitata p.es. dai vincoli che tengono l'asse fisso) per mantenere il c.d.m. in rotazione.

Calcoliamo ora il momento angolare rispetto al punto O, che si trova sull'asse fisso:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
&= \sum (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i)) \\
&= \sum (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\
&= \sum (z_i m_i \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} \\
&= -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_{//}
\end{aligned}$$



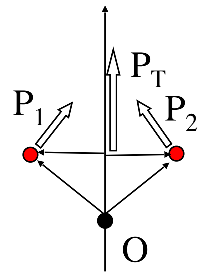
Moti rotatori con asse fisso (2)

Il momento angolare intorno ad un polo sull'asse di rotazione, $\vec{P} = \vec{P}_{\perp} + \vec{P}_{//}$ possiede quindi una componente perpendicolare all'asse e una parallela ad esso, data da: $\vec{P}_{//} = \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}$

dove $I = \sum m_i \rho_i^2$, che è lo stesso per qualunque polo posto sull'asse, è detto momento d'inerzia rispetto all'asse

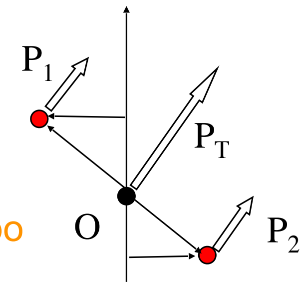
Il momento angolare si può quindi scrivere come $\vec{P} = \vec{P}_{\perp} + I\vec{\omega}$

La componente perpendicolare $\vec{P}_{\perp} = -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i$ si annulla se l'asse è un asse di simmetria del corpo rigido. Infatti in tal caso per ogni punto i ci sarà un punto i' con la stessa massa, simmetrico rispetto all'asse, e la sommatoria è quindi identicamente nulla.



La presenza di un termine perpendicolare può essere invece facilmente illustrata per un sistema di due soli punti non simmetrico rispetto all'asse di rotazione

questo momento angolare ruota solidale con il corpo



Moti rotatori con asse fisso (3)

Come si è visto nel semplice esempio precedente, se il momento angolare non è allineato con l'asse di rotazione non può rimanere costante durante la rotazione. La rigidità del sistema fa sì che ruoti anch'esso intorno all'asse di rotazione, con un moto detto di precessione.

Poiché il momento angolare di un sistema isolato si deve conservare, è necessario un momento delle forze esterne (e non semplicemente una forza esterna) che faccia ruotare $\vec{P}$.

Dimostreremo in seguito che per un corpo rigido di forma qualunque, per ogni polo esistono sempre almeno tre assi tra loro ortogonali, detti assi principali d'inerzia, per i quali si annulla $\vec{P}_{\perp}$. Se il polo è nel c.d.m. questi tre assi sono detti assi centrali d'inerzia.

Quindi per mantenere la rotazione intorno ad un asse centrale non sono necessarie né forze esterne né momenti di forze esterni: un corpo rigido isolato in rotazione intorno ad un asse centrale d'inerzia mantiene questo stato indefinitamente, senza che sia necessaria la presenza di alcun vincolo.

Rotolamento (FMUV 8.2.3)

Il rotolamento è, ad esempio, il moto di una ruota su una strada.

Nel caso generale, la velocità di un punto qualunque della ruota è data da

$$\vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C)$$

La condizione per la quale il punto di contatto P* sia fermo (puro rotolamento) è che la sua velocità sia nulla, per cui

$$\vec{V}_C = -\vec{\omega} \times (\vec{r}\,^* - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}\,^*)$$

d'altra parte sostituendo questa velocità del c.d.m. nella precedente si ha:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}\,^*) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}\,^*)$$

che dimostra che la velocità di un punto qualunque si può ricavare dalla rotazione del corpo rigido, con la stessa velocità angolare con cui ruota intorno al c.d.m., intorno ad un asse passante per il punto di contatto, e quindi non solidale né col corpo né con la superficie della strada, detto asse istantaneo di rotazione.

La traiettoria di un punto qualunque della ruota, che è ovviamente una circonferenza nel riferimento del c.d.m., è una cicloide in un riferimento solidale con la strada.

Si noti che per un corpo rigido in movimento arbitrario di rototraslazione esiste sempre un punto r^* (non necessariamente interno al corpo) tale che $\vec{V}_C = \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}\,^*)$

Un asse passante per r^* e orientato come $\vec{\omega}$ individua quindi l'asse istantaneo di rotazione del sistema e la velocità angolare di rotazione è uguale a $\vec{\omega}$.

Calcolo del momento di inerzia (FMUV 8.3)

L'espressione del momento d'inerzia $I = \sum m_i \rho_i^2$ si traduce in un integrale per un sistema rigido continuo: $I = \int_V \rho^2 dm$

Come esempio calcoliamo il momento di inerzia di un disco piano omogeneo: la massa dm può essere espressa attraverso la densità superficiale $\sigma = m/\pi R^2$

La massa di una corona circolare di spessore dr è

$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

e il momento d'inerzia rispetto al centro del disco è quindi

$$I = \int_S r^2 dm = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

Lo stesso risultato si ottiene ovviamente per un cilindro omogeneo:

$$dm = \rho dV = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi r dr dh$$

$$I = \int_V r^2 dm = \int_0^h dh \int_0^R \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi r^3 dr = \frac{2m}{R^2 h} \int_0^h dh \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

Dimensioni del momento d'inerzia: $[I] = [ml^2]$