Urti nel riferimento del c.d.m. (FMUV 7.14-7.14.4)

La descrizione dell'urto nel riferimento del c.d.m. è particolarmente semplice:

Urto elastico: $K'_i = K'_f = \frac{1}{2}\mu v^2$

$\longrightarrow$ il modulo della velocità relativa è lo stesso prima e dopo l'urto

$$|q'_{1i}| = |q'_{2i}| = \mu |v| = |q'_{1f}| = |q'_{2f}|$$

Urto anelastico: la velocità relativa diminuisce,

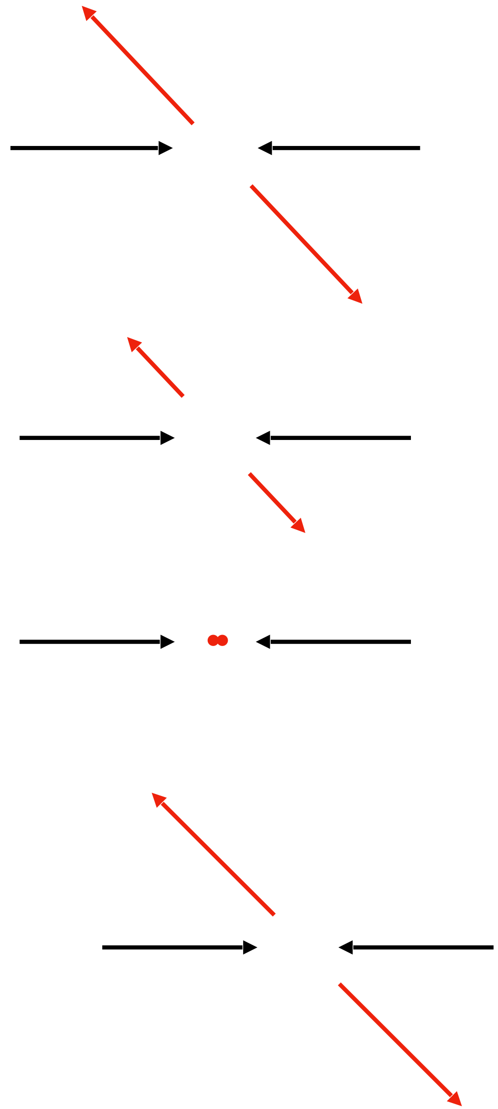
la minima energia si ha per velocità relativa nulla

$\longrightarrow$ urto completamente anelastico

Coefficiente di anelasticità $\quad e = \frac{q'_f}{q'_i} \qquad K'_f = e^2 K'_i$

Reazioni esoenergetiche (con rilascio di energia)

Dove va l'energia che si perde?



Urto completamente anelastico

Un esempio di urto totalmente anelastico si ha nel pendolo balistico:

Il proiettile si conficca nel bersaglio, fermandosi.

Non si conserva l'energia, non si conserva la quantità di moto.

Si conserva il momento angolare:

$$\vec{r} \times m\vec{v}_p = \vec{r} \times (m+M)\vec{v}_D \quad \Rightarrow \quad v_D = \frac{m}{m+M} v_p$$

Durante l'urto, si conserva anche la quantità di moto (ruolo della forza peso?)

Dal momento in cui il proiettile è fermo nel bersaglio, si conserva anche l'energia totale, per cui quando D si è fermato ad una quota h, si può scrivere:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_D^2 = \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}v_p^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_p^2 = (m+M)gh$$

da cui $v_p^2 = 2\dfrac{(m+M)^2}{m^2}gh \quad \Rightarrow \quad v_p = \left(1+\dfrac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}$

Propulsione dei razzi (FMUV 7.17)

Propulsione a reazione, tipica dei razzi (un po' diversa la propulsione degli aerei a reazione)

Assumendo le forze esterne trascurabili, l'espulsione di gas ad alta velocità comporta che, per garantire la conservazione della quantità di moto totale del sistema, il razzo debba aumentare la sua quantità di moto in direzione opposta al gas.

In questo caso dobbiamo considerare però che la massa del razzo, man mano che il gas viene espulso, diminuisce.

La quantità di moto del razzo sarà dunque $\vec{Q}(t) = M(t)\vec{v}(t)$

Supponiamo di poter schematizzare l'effetto dei motori come l'espulsione in un tempo dt di una massa costante di gas dm con velocità relativa rispetto al razzo pari a $\vec{u}$ e costante nel tempo.

Nel tempo dt, la velocità del razzo diventa $\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v}$

in conseguenza, la velocità del gas espulso nel riferimento inerziale sarà

$$\vec{v}^* = \vec{v}(t+dt) + \vec{u} = \vec{v}(t) + d\vec{v} + \vec{u}$$

per cui $\vec{Q}(t+dt) = [M(t) - dm](\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u})$

Propulsione dei razzi (2)

$$\vec{Q}(t+dt) = [M(t) - dm](\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u})$$

$$\vec{Q}(t+dt) = M(t)\vec{v} + M(t)d\vec{v} - \cancel{dm\vec{v}} - \cancel{dm\,d\vec{v}} + \cancel{dm\vec{v}} + \cancel{dm\,d\vec{v}} + dm\,\vec{u}$$

per cui $d\vec{Q} = \vec{Q}(t+dt) - \vec{Q}(t) = Md\vec{v} + \vec{u}\,dm$

ma $d\vec{Q} = Md\vec{v} + dm\,\vec{u} = F^{(e)}dt \quad \Rightarrow \quad M\dfrac{d\vec{v}}{dt} = F^{(e)} - \dfrac{dm}{dt}\vec{u}$

quindi la restante massa M del razzo, oltre alle forze esterne, subisce una spinta in direzione opposta proporzionale alla massa espulsa nell'unità di tempo ed alla velocità di espulsione:

$$\vec{S} = -\vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

Se le forze esterne sono trascurabili rispetto alla spinta ed il razzo si muove inizialmente già nella direzione della spinta

$$M\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}u \quad \Rightarrow \quad dv = -u\frac{dM}{M}$$

e possiamo facilmente calcolare la velocità finale in termini della massa totale del carburante M_n e della massa finale della nave spaziale M_n:

$$v_f = v_0 + u\ln\frac{M_0}{M_f} = v_0 + u\ln\left(1 + \frac{M_c}{M_n}\right)$$ essendo $M_0 = M_n + M_c$

Propulsione dei razzi (3)

$$v_f = v_0 + u \ln \frac{M_0}{M_f} = v_0 + u \ln\left(1 + \frac{M_c}{M_n}\right)$$

come si vede dalla formula, la velocità finale dipende linearmente da u (e da v_0) e solo logaritmicamente dal rapporto tra la massa del carburante e la massa della navicella.

Inoltre la velocità finale non dipende dal tempo totale necessario per espellere il combustibile.

La situazione cambia però se consideriamo la gravità. Se per semplicità consideriamo la spinta diretta secondo la verticale con partenza da fermo, abbiamo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{u}}{M}\frac{dM}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_f = u \ln \frac{M_0}{M_f} - (t_f - t_0)g$$

tanto maggiore quanto più piccolo è l'intervallo $(t_f - t_i)$

Perché la velocità finale è il parametro più rilevante?

Velocità di fuga $\quad \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0$