TEOREMA di ASCOLI-ARZELÀ

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ chiuso e limitato

Sia $\mathcal{F} \subset C(K)$ t.c.

1) $\mathcal{F}$ limitato, cioè $\|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}$

2) $\mathcal{F}$ unif^{te} equicontinuo, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in K \\ |x_1 - x_2| < \delta \end{array}\right| \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C(K)$,

cioè $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto in $C(K)$

cioè ogni succ^{ne} $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ammette una sottosucc^{ne} convergente in $C(K)$, cioè convergente uniformemente.

DIM Sia $\{f_n\}$ una succ^{ne} in $\mathcal{F}$.

Step 1 K separabile

$\Rightarrow$ Sia $\{y_n\}$ un s.i. numerabile denso in K.

Fisso y_1 $\{f_n(y_1)\}$ limitata

$\Rightarrow \exists$ sottosucc^{ne} $\{f_{k_n^{(1)}}\}$ t.c. $f_{k_n^{(1)}}(y_1)$ converge.

Considero questa sottosucc^{ne}. Estraggo una nuova sottosucc

$\{f_{k_n^{(2)}}\}$ t.c. $f_{k_n^{(2)}}(y_2)$ converge

$f_{k_n^{(2)}}(y_1)$ converge.

Proseguendo, $\forall j$ estraggo una sottosucc^{ne}

$f_{k_n^{(j)}}$ che converge in $y_1 \dots y_j$

Procedimento diagonale. Prendo

$f_{k_n^{(n)}}$, questa converge in tutti gli y_j.

$f_{k_n^{(n)}}(y_j)$ converge $\forall j \in \mathbb{N}$.

Step 2 Mostriamo che questa sottosucc^{ne}, che richiamo ora $\{f_n\}$, in realtà converge su tutto K.

Sia $x \in K$. Mostriamo che $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy.

Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché $\{y_k\}$ è denso, trovo un y_j t.c. $|x - y_j| < \delta$ (δ relat. a ε nell'hyp. 2).

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(y_j)|}_{\hat{\varepsilon}} + \underbrace{|f_n(y_j) - f_m(y_j)|}_{\substack{\hat{\varepsilon} \\ \text{se } n, m \text{ grandi}}} + \underbrace{|f_m(y_j) - f_m(x)|}_{\hat{\varepsilon}}$$

$$< 3\varepsilon$$

Abbiamo provato che $\{f_n(x)\}$ converge $\forall x \in K$.

Chiamo $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Step 3 $f(x)$ è continua su K.

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon \quad \forall n$$

Passo al limite in n

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ è continua.

Step 4 $f_n \longrightarrow f$ unif^{te}.

Fisso δ corrispondente a ε nell'ipotesi 2).

K compatto $\Rightarrow \exists\, j$ pti $z_1, \dots z_j \in K$ t.c.

$$K \subset \bigcup_{h=1}^{j} B(z_h, \delta)$$

Inoltre prendo $\bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad \forall h = 1 \dots j$

$$|f_n(z_h) - f(z_h)| < \varepsilon$$

Fissato $x \in K$, $\exists\, z_h$ t.c. $d(x, z_h) < \delta$

$\forall n > \bar{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(z_h)|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}} + \underbrace{|f_n(z_h) - f(z_h)|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}} + \underbrace{|f(z_h) - f(x)|}_{\overset{\wedge\!\wedge}{\varepsilon}} < 3\varepsilon$$

$\square$

GENERALIZZAZIONI

Al posto di K compatto di $\mathbb{R}^N$ ci possiamo mettere un qualunque sp. metrico compatto e ~~separabile~~

OSS ogni sp. metrico compatto è separabile!

Al posto di $\mathbb{R}$ (come sp. di arrivo) posso mettere un qualunque sp. metrico compatto Y

nel caso di $\mathbb{R}$, in realtà la prima ipotesi dice che sto prendendo $Y = [-M, M]$

OSS compatto $\Rightarrow$ completo.

L'ipotesi 1) si può buttare.

TEOREMA (rel. compattezza in $L^p(\Omega)$)
(Kolmogorov - Riesz - Frechet)

Sia $1 \le p < \infty$. Sia $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ t.c.

1) $\mathcal{F}$ limitato in $L^p(\mathbb{R}^N)$, cioè

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le M \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon \qquad \forall h \text{ t.c } |h| < \delta$$
$$\forall f \in \mathcal{F}.$$

cioè

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \quad \text{unif}^{te} \text{ in } f$$

$$\tau_h f(x) = f(x+h)$$

Allora $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e di misura finita

$$\mathcal{F}\Big|_\Omega = \{ f|_\Omega : f \in \mathcal{F} \} \text{ è rel. compatto in } L^p(\Omega)$$

Cioè $\forall (f_n) \subset \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosucc^{ne} convergente in $L^p(\Omega)$.

OSS Il teorema di solito si usa così:

Data $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$, la estendo in modo conveniente a $L^p(\mathbb{R}^N)$ (per es. estensione a zero) e poi applico il teorema e torno a Ω.

DIM. TEOREMA

Step 1 Sia $\{\rho_n\}$ una succ^ne di mollificatori di $\mathbb{R}^N$

$$\lim_{n\to+\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \text{unif}^{te} \text{ in } f \in \mathcal{F}$$

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ (basta prendere $n > 1/\delta$)

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

già dimostrato.

Step 2. Per n fissato la famiglia $\{\rho_n * f\}_{f\in\mathcal{F}}$ soddisfa le ipotesi di Ascoli-Arzelà.

1) $\|\rho_n * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c_n M.$

2) $|(\rho_n * f)(x_1) - (\rho_n * f)(x_2)| \leq \underbrace{c_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}_{\leq c_n M.} |x_1 - x_2|$

già dim.

Step 3 (Inutile se Ω è limitato)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega \subset \Omega$ limitato e misurabile t.c.

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

Infatti:

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \le \underbrace{\|f - (\rho_n * f)\|_{\cancel{L^p(\Omega\setminus\omega)}\ L^p(\mathbb{R}^N)}}_{} + \|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}$$

1) fisso n in modo che sia $< \frac{\varepsilon}{2}$

2°) fissato n

$$\underbrace{\underbrace{\|\rho_n * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}_{\le\, C_n \text{ (step 2)}} \underbrace{|\Omega \setminus \omega|^{1/p}}_{\substack{\text{scelgo } \omega \text{ t.c.} \\ |\Omega \setminus \omega| \text{ sia piccol}}}}_{\wedge\ \varepsilon/2}$$

$$\left[\int_{\Omega\setminus\omega} |\rho_n * f|^p\right]^{1/p}$$

Step 4 (Conclusione)

Poiché $L^p(\Omega)$ è completo, quindi

$\left(\mathcal{F}|_\Omega\right)$ è completo.

devo provare che $\mathcal{F}|_\Omega$ è totalmente limitato,

cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ricoprimento finito di $\mathcal{F}|_\Omega$

con palle di raggio ε

$\mathcal{F}|_\Omega$ totalmente limitato $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{F}|_\Omega}$ tot. limitato.

Fisso $\varepsilon > 0$ Scelgo $\omega \subset \Omega$ t.c. valga step 3

Fissiamo $n > \frac{1}{\delta}$ (step 1).

$\mathcal{H} = (\rho_n * \mathcal{F})|_{\overline{\omega}}$ verifica Ascoli-Arzelà (step 2)

$\overset{AA}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{H}$ rel. compatto in $C(\overline{\omega})$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ rel. compatto in $L^p(\omega)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon)$ $\quad g_i \in L^p(\omega)$

Definisco

$$\overline{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{se } x \in \omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \in L^p(\Omega)$$

Mostro che $\mathcal{F}|_\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\overline{g}_i, 3\varepsilon)$

$\forall f \in \mathcal{F} \quad \exists\, i \in \{1, \dots k\}$ t.c.

$$\|(\rho_n * f) - g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

$$\|f - \bar{g}_i\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f - \bar{g}_i|^p =$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega\setminus\omega} |f|^p dx}_{\wedge\, \varepsilon^p} + \int_\omega |f - g_i|^p$$

$$\Rightarrow \|f - \bar{g}_i\|_{L^p(\Omega)} < \left(\varepsilon^p + \int_\omega |f - g_i|^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left(\int_\omega |f - g_i|^p\right)^{1/p}$$

<u>oss</u> $\forall x, y > 0$ $\quad (x+y)^\lambda \leq x^\lambda + y^\lambda$
$\forall \lambda \in (0,1)$ $\quad \lambda = 1/p$

$$\|f - \bar{g}_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon + \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \underbrace{\|f - (\rho_n * f)\|_{L^p(\omega)}}_{\wedge\, \varepsilon} + \underbrace{\|\rho_n * f - g_i\|_{L^p(\omega)}}_{\wedge\, \varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}|_\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\bar{g}_i, 3\varepsilon) \qquad \square$$

Spazi di Sobolev

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $\quad 1 \le p \le \infty$

Definiamo

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \text{ t.c. } \forall i = 1 \dots N \ \exists\, v_i \in L^p(\Omega) \text{ t.c. } \int_\Omega u \varphi_{x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) \Big\}$$

C^1 a supp. compatto in Ω

v_i si dice "derivata debole i-esima di u".

e si scrive $\quad v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

In altre parole, le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ sono le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ le cui derivate distribuzionali (che esistono $\forall u \in L^1_{loc}(\Omega)$) sono funzioni di $L^p(\Omega)$.

<u>OSS</u> se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ t.c. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e la derivata debole coincide con quella classica (integraz. per parti)

In particolare, se Ω è limitato e regolare, ~~allora~~

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega).$$

Viceversa, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e se le sue derivate deboli sono continue, allora u è derivabile parzialmente in senso classico, e $u \in C^1(\Omega)$

più precisamente, $\exists\ \tilde{u} \in C^1(\Omega)$ t.c.

$$u = \tilde{u} \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ è dotato della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

norma L^p

altre norme equivalenti:

$$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_p + \| |\nabla u| \|_p$$

TEOREMA

- $W^{1,p}(\Omega)$ è uno sp. di Banach
- $W^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo $\iff$ $1 < p < \infty$
- $W^{1,p}(\Omega)$ è separabile $\iff$ $1 \leq p < \infty$
- $W^{1,\infty}$ non è separabile

ESEMPIO di $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus C^1(\Omega)$

$\Omega = (-1,1)$ $\qquad u(x) = |x|$

Allora la sua derivata debole vale

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1,0) \\ 1 & x \in (0,1) \end{cases} = \text{sign } x$$

se dimostro questo, allora $u \in W^{1,\infty}(-1,1)$

Devo provare che

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(-1,1)$$

cioè $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\varphi'(x)\,dx \overset{?}{=} -\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\text{sign } x\,dx$

$\shortparallel$

$$-\int_{-1}^{0} x\varphi$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,\varphi'(x)\,dx \overset{?}{=} -\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{sign}\,x\,dx$$

$$\parallel$$

$$-\int_{-1}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx - \cancel{x\,\varphi(x)\Big|_{-1}^{0}} - \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx + \cancel{x\,\varphi(x)\Big|_{0}^{1}}$$

Questo esempio vale anche in dim N

$\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$

$u(x) = |x|$ si dim. che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$

e $\nabla u(x) = \dfrac{x}{|x|}$

e la verifica si fa come nel succ. esempio.

$\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad \alpha > 0 \text{ da fissare}$$

$$u \notin L^\infty(\Omega) \qquad u(x) \in L^p(\Omega) \iff 1 \leq p < \frac{N}{\alpha}$$

(in particolare deve essere $\alpha < N$)

Vedremo che sotto ulteriori ipotesi su α e p

$$u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$$