PROPOSIZIONE X sp. di Banach riflessivo

$M \subset X$ sottosp. vettoriale chiuso

Allora M è riflessivo.

DIM. Considero M con la norma di X: M è di Banach (perché è chiuso).

Su M ci sono due topologie deboli

1) la topologia indotta da $\sigma(X, X^*)$

2) la topologia debole $\sigma(M, M^*)$

Esercizio: le due topologie coincidono

si basa sull'osservazione che ogni funzionale $f \in M^*$ si può estendere per Hahn-Banach a un funzionale lin. cont. su X, cioè di X^*.

Dobbiamo provare che B_M è compatta in $\sigma(M, M^*)$ ($\Rightarrow$ [Kakutani] M è riflessivo).

B_X compatta in $\sigma(X, X^*)$ per Kal.

$$B_M = \underbrace{B_X}_{\text{deb. chiuso}} \cap \underbrace{M}_{\text{deb. chiuso}} = \text{deb. chiuso} \subset B_X$$

deb. chiuso (perché convesso e fortem. chiuso)

$\Rightarrow B_M$ è deb. compatto in $\sigma(X, X^*)$ e quindi in $\sigma(M, M^*)$

$\square$

TEOREMA X sp. di Banach

X riflessivo $\Longleftrightarrow$ X^* riflessivo

Dim $\boxed{\Longrightarrow}$ Supp. X riflessivo

Dobbiamo provare che l'iniezione canonica

$$J^* : X^* \longrightarrow X^{***} \text{ è suriettiva.}$$

Sia $\varphi \in X^{***} = (X^{**})^*$

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \varphi, J(x) \rangle =: \langle f, x \rangle$$

$$\xi \in X^{**} = J(X) \Rightarrow \xi = J(x)$$

X riflessivo

OSS $f : X \to \mathbb{R}$ lineare

$$|\langle f, x \rangle| = |\langle \varphi, J(x) \rangle| \leq \|\varphi\|_{***} \|J(x)\|_{**} =$$

$$= \|\varphi\|_{***} \|x\|$$

$\Rightarrow f$ continuo. $\Rightarrow f \in X^*$

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \langle f, x \rangle = \langle J(x), f \rangle = \langle \xi, f \rangle \quad \forall \xi \in X^{**}$$

$\Rightarrow \varphi = J^*(f) \Rightarrow J^*$ è suriettivo. $\square$

Dim $\boxed{\Leftarrow}$

X^* riflessivo $\xRightarrow{(1^a\ \text{parte})}$ X^{**} riflessivo

$J(X)$ sottospazio di X^{**}, chiuso forte di X^{**}

Basta controllare che $\xi_n \in J(X)$, $\xi_n \to \xi$ in X^{**} allora $\xi \in J(X)$
$\xi_n = J(x_n)$

$\{\xi_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow$ $J(x_n)$ è di Cauchy

$\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy $\xRightarrow{X\ \text{Banach}}$ $x_n \to x$ $\Rightarrow$ $J(x_n) \to J(x)$ (e $J(x_n) \to \xi$)

$\Rightarrow$ $\xi = J(x)$

$\Rightarrow$ $J(X)$ riflessivo.

$X = J^{-1}(J(X))$ $\qquad J^{-1}$ isometria.

Si conclude grazie al seguente lemma (con $T = J^{-1}$)

LEMMA $T: X \to Y$ isomorfismo isometrico

Allora X riflessivo $\Rightarrow$ Y riflessivo.

Dim Lemma X riflessivo $\Rightarrow$ B_X deb compatta.

$\left.\begin{array}{l} T \text{ lineare} \\ T \text{ fortemente continua} \end{array}\right] \Longrightarrow T$ debolmente continua $\Downarrow$ $T(B_X)$ deb comp

Y riflessivo $\xLeftarrow{\text{Kakutani}}$ B_Y deb. compatto $\Longleftarrow$ $B_Y = T(B_X)$

TEOREMA X sp. di Banach

(X riflessivo e separabile) $\Leftrightarrow$ (X^* riflessivo e separabile)

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ ovvia

$\boxed{\Rightarrow}$ Dobbiamo solo provare X^* separabile.

X separabile $\Rightarrow$ $\overset{J \text{ isometria}}{J(X)} = X^{**}$ separabile.

$$\Downarrow$$

X^* separabile

COROLLARIO

X riflessivo e separabile $\Rightarrow$ X^* separabile

$\Rightarrow$ B è deb. metrizzabile | $\Rightarrow B$ seq^{te} debolmente compatta.

B è deb. compatta

cioè da ogni successione limitata di X posso estrarre una sottosucc^{ne} convergente debolmente.

Ora buttiamo l'ipotesi di separabilità.

TEOREMA (della sequenziale compattezza debole)

X riflessivo $\iff$ ogni succ^{ne} limitata in X ammette una sottosucc^{ne} deb. convergente

Dim [Solo $\Rightarrow$].

Supponiamo $\|x_n\| \leq 1$

OSS ovvio se X è riflessivo e anche separabile.

In generale ci si riduce a $\overline{\mathrm{span}\{x_n\}} =: M$

M sottospazio chiuso e separabile

approssimo con comb. lineari finite degli $\{x_n\}$ a coeff^{ti} razionali

Inoltre M è riflessivo

(sottosp. chiuso di X riflessivo).

B_M è deb. compatto, e M^* separabile.

$\Rightarrow B_M$ è metrizzabile per la top debole $\sigma(M, M^*)$

$\Rightarrow B_M$ è seq^{te} deb^{te} compatto.

$\Rightarrow \exists$ sottosucc^{ne} $\{x_{n_k}\}$ convergente in $\sigma(M, M^*)$

(cioè x_{n_k} converge in $\sigma(X, X^*)$)

$\square$

TEOREMA di ASCOLI-ARZELÀ (Caratterizzazione degli insiemi relativamente compatti nelle funz. continue)

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ chiuso e limitato (in generale K = spazio metrico compatto).

Sia $\underbrace{\mathcal{F}}_{=\{f\}_{f\in\mathcal{F}}} \subset C(K)$ t.c.

1) $\mathcal{F}$ limitato, cioè $\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in \mathcal{F}$

2) $\mathcal{F}$ unif^{te} equicontinuo, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

$x_1, x_2 \in K$

Allora $\mathcal{F}$ ha chiusura compatta in $C(K)$.

In particolare:
ogni succ^{ne} $\{f_n\}$ verificante 1) e 2) ammette una sottosucc^{ne} convergente in $C(K)$, cioè uniformemente.

Esempio: $\{f_n\}$ successione in $C^1([0,1])$

limitata in C^1 ($\Rightarrow$ cioè $\|f_n\| \leq c$

$\|f_n'\| \leq c$).

Posso estrarre una sottosucc^{ne} convergente unif^{te}.

Infatti: 1) $\{f_n\}$ limitata

2) $\{f_n\}$ equi-unif^{te} continua

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \underbrace{|f_n'(\xi)|}_{\leq c} |x_1 - x_2| \leq c\,|x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow$ si applica A-A.

<u>Idea</u>: Cercare un analogo risultato per gli spazi $L^p(\Omega)$

Criterio di compattezza forte in $L^p(\Omega)$ (Kolmogorov - Riesz - Frechet)

$\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ $\quad (1 \leq p < \infty)$ t.c.

1) $\mathcal{F}$ limitato in $L^p(\mathbb{R}^N)$, cioè

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

2) $\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ unif^{te} in $f \in \mathcal{F}$

cioè: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon \qquad \forall |h| < \delta, \ \forall f \in \mathcal{F}$$

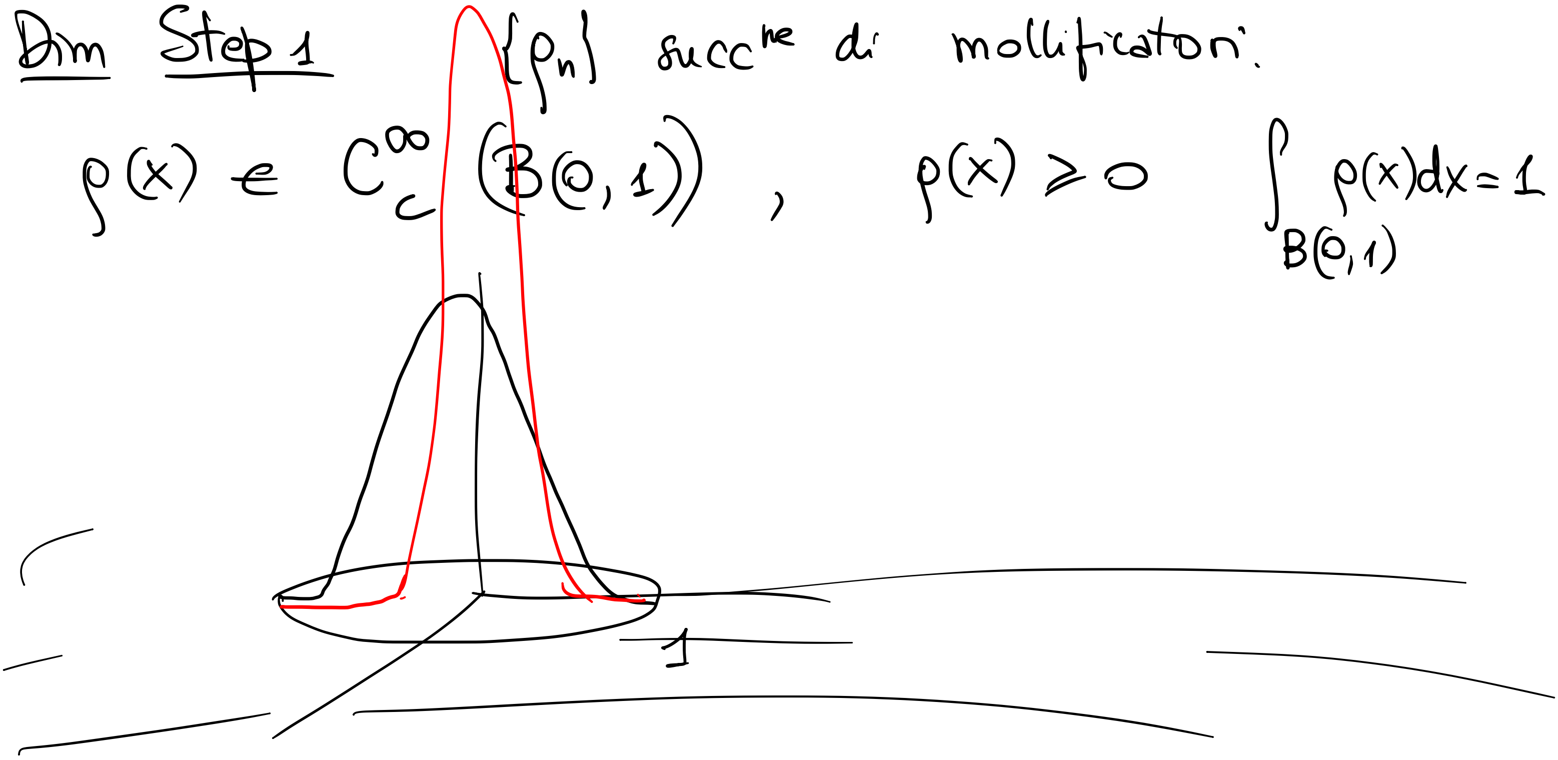
dove $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$

Allora $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e di misura finita

$\mathcal{F}\big|_\Omega = \{ f\big|_\Omega : f \in \mathcal{F} \}$ è rel^{te} compatto in $L^p(\Omega)$.

Dim Step 1 $\quad \{\rho_n\}$ succ^{ne} di mollificatori:

$$\rho(x) \in C_c^\infty(B(0,1)), \quad \rho(x) \geq 0 \quad \int_{B(0,1)} \rho(x)dx = 1$$



$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$$

In questo modo $\rho_n \in C_c^\infty\left(B\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1$

Sappiamo che $\quad (\rho_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, f(x-y)\, dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, f(y) dy$$

$$\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$\|\rho_n * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

e $\quad \rho_n * f \longrightarrow f \quad$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$

oss questa convergenza è uniforme rispetto a $f \in \mathcal{F}$

cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ (indip. da f) t.c. $\forall n > \bar{n}$ si ha

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x-y) - f(x)) \, \rho_n(y) \, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)| \, \rho_n(y) \, dy \leq \left[\text{Hölder con peso } \rho_n(y) \right]$$

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y) \, dy \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) \right]^{1/p'}$$

Integro in dx

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\rho_n * f)(x) - f(x)|^p \, dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y) \, dy \right) =$$

$$= \int_{\cancel{\mathbb{R}^N}\, B(0,\frac{1}{n})} dy \, \rho_n(y) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right]}_{\|\tau_{-y} f - f\|_p^p} = (*)$$

Fissato ε, scelgo $\bar{n} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{\bar{n}} < \delta$

$\forall n > \bar{n} \quad \forall |y| < \frac{1}{n}$

$$\| \tau_{-y} f - f \|_p < \varepsilon$$

$$(*) < \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dy = \varepsilon^p$$

$\Rightarrow$ Fissato $\varepsilon > 0$, prendo $\bar{n} > \frac{1}{\delta}$ e $n > \bar{n}$

$$\| (\rho_n * f) - f \|_p < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

<u>Step 2</u> $\forall n$ fissato, la famiglia

$\{\rho_n * f\}_{f \in \mathcal{F}}$ soddisfa le ipotesi di Ascoli-Arzelà, cioè:

1) $\| \rho_n * f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_n \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_n'$

2) $|(\rho_n * f)(x_1) - (\rho_n * f)(x_2)| \leq C_n \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x_1 - x_2|$

$$\leq C_n' \, |x_1 - x_2| .$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$$

Dim 1

$$|(\rho_n * f)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\,|f(y)|\,dy \overset{\text{Hölder}}{\le}$$

$$\le \|\rho_n\|_{p'} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le c_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = c_n'$$

2) $\nabla(\rho_n * f) = (\nabla \rho_n) * f$

$$\|\nabla(\rho_n * f)\|_\infty \le \|\nabla \rho_n\|_{p'} \; \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le c_n'$$

e la tesi segue dal teor. di Lagrange