Schematizzazione dell’urto tra due corpi

- “stato iniziale”: prima dell’urto
- “stato finale”: dopo l’urto

Per il carattere impulsivo dell’urto, la durata dell’interazione è breve, per cui possiamo sempre assumere che nello stato iniziale e finale le particelle non interagiscano tra loro.

Se uno dei due corpi è fermo nel laboratorio, si indica generalmente come “bersaglio”, mentre il corpo in movimento è il “proiettile”

In generale, 3 (o 4 per urti elastici) equazioni in 6 incognite

lo stato finale non è completamente determinato dalle leggi di conservazione

➡ la natura e le modalità della interazione definiscono lo stato finale

Viceversa, dalla conoscenza dello stato finale, si possono ricavare informazioni sulla natura dell’interazione

Questa è la base della maggior parte degli esperimenti sulle interazioni tra particelle, a partire dall’esperimento di Rutherford, che dimostrò l’esistenza di un nucleo massiccio al centro dell’atomo.

Collisione elastica di particelle

In certe situazioni, i principi di conservazione permettono da soli di determinare alcune delle caratteristiche osservabili dello stato finale.

Un tipico esempio è l'urto elastico tra due particelle di massa uguale, una delle quali è ferma (bersaglio).

Conservazione di Q $\vec{q}_{1i} = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \quad \Rightarrow \quad q_{1i}^2 = (q_{1f} + q_{2f})^2 = q_{1f}^2 + q_{2f}^2 + 2\vec{q}_{1f} \cdot \vec{q}_{2f}$

Conservazione di K $\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{q_{1i}^2}{2m} = \frac{q_{1f}^2}{2m} + \frac{q_{2f}^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad q_{1i}^2 = q_{1f}^2 + q_{2f}^2$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ha

$$q_{1f}^2 + q_{2f}^2 = q_{1f}^2 + q_{2f}^2 + 2\vec{q}_{1f} \cdot \vec{q}_{2f} \quad \Rightarrow \quad 2\vec{q}_{1f} \cdot \vec{q}_{2f} = 0$$

per cui

- o una delle due particelle finali è ferma
- o le loro quantità di moto sono ortogonali

conclusione molto utile nel gioco delle bocce o del biliardo!

Urto elastico unidimensionale (FMUV 7.13)

Urto tra due corpi che si muovono lungo una retta congiungente i loro c.d.m., o perché vincolati in tal senso (p. es. due carrellini che si muovono lungo un binario) o perché le loro $\overrightarrow{q}$ iniziali sono allineate con la retta. In quest'ultimo caso si parla di urto centrale elastico.

Se l'urto è elastico, l'energia interna dello stato iniziale deve essere uguale all'energia interna dello stato finale:

$$K'_{(i)}\left(=\frac{1}{2}\mu v^2_{(i)}\right)=K'_{(f)}\left(=\frac{1}{2}\mu v^2_{(f)}\right)$$

per cui la velocità relativa deve rimanere costante in modulo e in direzione. Dati i vincoli del problema, dovrà pero cambiare verso:

$$v_{1i}-v_{2i}=v_{2f}-v_{1f} \quad \Rightarrow \quad v_{2f}=v_{1i}-v_{2i}+v_{1f}$$

Combinandola con la conservazione di Q si ha:

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}=m_1v_{1f}+m_2(v_{1i}-v_{2i}+v_{1f})$$

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}-m_2v_{1i}+m_2v_{2i}=(m_1+m_2)v_{1f}$$

$$v_{1f}=\frac{(m_1-m_2)v_{1i}+2m_2v_{2i}}{m_1+m_2}$$ e analogamente $$v_{2f}=\frac{(m_2-m_1)v_{2i}+2m_1v_{1i}}{m_1+m_2}$$

Urto elastico unidimensionale (2)

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

per masse uguali, da queste due relazioni si ricava immediatamente

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

i due corpi si scambiano le velocità (se si tratta di due corpi identici, è come se i due corpi si attraversassero senza interagire)

Se il bersaglio è fermo ($v_{i2} = 0$), $v_{1f} = \dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i}$ e $v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

il bersaglio si muove sempre nella direzione iniziale del proiettile, mentre il proiettile rimbalza, si ferma o procede in avanti a seconda che la sua massa sia minore, uguale o maggiore di quella del bersaglio.

L'ultimo risultato (se il proiettile ha massa maggiore del bersaglio procede sempre in avanti) è indipendente dalla centralità dell'urto (vedi FMUV esempio 7.38) ed è alla base di alcuni fondamentali esperimenti di fisica delle particelle (come l'esperimento di Rutherford)

Energia nell'urto elastico unidimensionale

Sempre su bersaglio fermo, per le energie cinetiche si ha:

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_{1i}^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 K_{1i}$$

$$K_{2f} = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_{1i}^2 = \frac{4m_1}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2} K_{1i} = f K_{1i}$$

f rappresenta la frazione di energia ceduta in un urto dal proiettile al bersaglio, piccola quando $m_2 \gg m_1$

Abbiamo visto prima che se il proiettile è molto più leggero del bersaglio, dopo l'urto tornerà indietro, ma l'energia trasferita al bersaglio sarà piccola. Quindi il modulo della velocità finale del proiettile sarà molto prossimo a quello iniziale, per cui il proiettile invertirà la propria quantità di moto, trasferendo tutto l'impulso in eccesso al bersaglio.

Un bersaglio pesante assorbe quindi impulso senza assorbire energia

Viceversa, quando le due masse sono uguali tutta l'energia è trasferita dal proiettile al bersaglio (scoperta del neutrone)

Esempio di urto elastico su bersaglio pesante

Rimbalzo di una palla di massa m_1 che colpisce una parete (massa m_2 infinita) con quantità di moto perpendicorale ad essa: la palla rimbalza invertendo esattamente la quantità di moto e quindi la velocità:

$$m_1 \vec{v}_{1f} = -m_1 \vec{v}_{1i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} = -\vec{v}_{1i}$$

La variazione dell'impulso della palla è $\Delta \vec{q}_1 = -2\vec{q}_1$, un impulso uguale ed opposto deve essere assorbito dalla parete: $\Delta \vec{q}_2 = 2\vec{q}_1$

Come può la parete assorbire impulso se rimane ferma?

Se la massa della parete è infinita, affinché il prodotto $m_2 \vec{v}_2$ sia finito, la velocità v_2 deve essere nulla.

E l'energia? l'energia cinetica della palla rimane invariata.

Calcoliamo allora la variazione di energia della parete, che inizialmente è nulla:

$$K_2 = \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{(\Delta q_1)^2}{2m_2} = 0$$

Lo stesso vale per un rimbalzo a terra, nonostante la presenza della forza di gravità: per il carattere impulsivo dell'urto, la gravità non ha alcun effetto durante il breve intervallo nel quale la palla inverte la propria velocità.

Rimbalzo con velocità non ortogonale alla parete

Se la direzione non è ortogonale, urto elastico → vincolo conservativo → reazione normale

→ impulso scambiato normale al vincolo

Conservazione dell'energia cinetica

si inverte solo la componente normale (rimbalzo speculare)

$$v_i \equiv (v_{ix}, v_{iy}); \quad v_f \equiv (-v_{ix}, v_{iy})$$

$$\Delta \overrightarrow{q}_1 \equiv (-2q_x, 0); \quad \Delta \overrightarrow{q}_2 \equiv (2q_x, 0)$$

L'energia della palla si conserva:

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2$$

L'energia della parete rimane nulla.