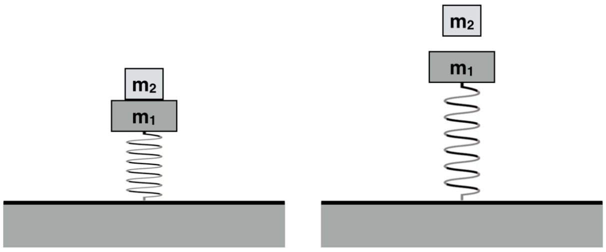
Esercizio n. 2



Il sistema in figura è costituito da una molla verticale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 che è attaccata alla massa m_1. Su tale massa è appoggiata un'altra massa m_2.

1) Calcolare la lunghezza della molla affinché il sistema, inizialmente fermo, resti fermo in equilibrio.

Successivamente la molla viene ulteriormente compressa. Quando ha lunghezza l_1 (per $t=t_0$) essa viene lasciata libera di espandersi. Calcolare:

2) l'accelerazione del sistema delle due masse all'istante $t=t_0$
3) la forza scambiata tra le due masse all'istante $t=t_0$
4) la lunghezza della molla quando la massa m_2 si stacca dalla massa m_1. Verificare anche che la molla può raggiungere tale lunghezza.

Assumere che il moto avvenga sempre lungo la verticale.

5) come si muovono qualitativamente le due masse dopo il distacco?
6) a quale quota arriva la massa 2?
7) che cambia se la massa 1 è nulla?

Dati numerici:
k = 100 N/m ; l_0 = 30 cm ; m_1 = 0.1 kg ; m_2 = 1.1 kg ; l_1 = 2 cm ;

Soluzione domande 1-4

1. Il secondo principio applicato sui due corpi da'

$$\begin{cases} -k(l-l_0) - m_1 g - R = m_1 a_1 \\ R - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$

Se i corpi restano attaccati le due accelerazioni sono uguali. Sommando le due equazioni otteniamo

$-k(l-l_0) - (m_1+m_2)g = (m_1+m_2)a$ che è l'equazione di un oscillatore armonico.

All'equilibrio imponiamo $a = 0$ pertanto : $-k\left(l_{eq} - l_0\right) - (m_1+m_2)g = 0$

e quindi $l_{eq} = l_0 - (m_1+m_2)g/k = 18.2\ cm$

2. Dall'equazione scritta sopra otteniamo l'accelerazione:

$$a = -k(l_1 - l_0)/(m_1+m_2) - g = 13.5\ m/s^2$$

3. La forza che si scambiano le due masse si puo' ricavare dal secondo principio per la massa 2 scritto sopra: $R = m_2(g+a) = 25.7\ N$

4. La massa 2 si stacca quando la forza che si scambiano le due masse si annulla, cioè quando $a = -g$ (dal punto 3). Imponendo questa condizione nell'espressione per l'accelerazione calcolata nel punto 2 si ottiene:

$-g = -k(l_s - l_0)/(m_1+m_2) - g$ da cui $l_s = l_0 = 30.0\ cm$

Il sistema delle due masse raggiunge tale punto grazie alle condizioni iniziali. Infatti è un moto di un oscillatore armonico che oscilla intorno a l_{eq} di ampiezza $l_{eq} - l_1$ e dunque tra l_1 e $2l_{eq} - l_1 = 34.4\ cm$ che è maggiore di l_s.

Ulteriore discussione e soluzione domande 5-7.

Entrambe le forze che entrano nel problema sono conservative.
Vediamo quindi cosa possiamo ricavare da considerazioni energetiche.

Determiniamo il potenziale complessivo delle due forze conservative in funzione della lunghezza l della molla, chiamando $m = m_1 + m_2$

$$V(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + mgl = \frac{1}{2}kl^2 - kll_0 + \frac{1}{2}kl_0^2 + mgl$$

Determiniamo la posizione di equilibrio annullando la derivata del potenziale

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{eq} = kl_{eq} - kl_0 + mg = 0$$ da cui ritroviamo il risultato precedente:

$$l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}.$$

L'equilibrio è stabile in quanto $\left.\frac{d^2V}{dl^2}\right|_{eq} = k > 0.$

Applichiamo ora la conservazione dell'energia per determinare la velocità v_s delle due masse al momento del distacco:

$$E = V(l) + K(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + mgl + \frac{1}{2}mv^2(l) = \text{costante}$$

$$E_i = V(l_1) = \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 + mgl_1 \qquad E_s = V(l_0) + K(l_0) = mgl_0 + \frac{1}{2}mv_s^2$$

$$E_i = E_s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 + mgl_1 = \frac{1}{2}mv_s^2 + mgl_0$$

$$v_s^2 = \frac{k}{m}(l_1 - l_0)^2 + 2g(l_1 - l_0) \qquad (1)$$

Possiamo ora rispondere alla domanda 5:
La massa 1 si trova attaccata alla molla con velocità iniziale v_s diretta verso l'alto, ed oscillerà intorno alla nuova posizione di equilibrio $l'_{eq} = l_0 - \frac{m_1 g}{k}$

La massa 2 si muove anch'essa verso l'alto con la stessa velocità iniziale v_s , ma è soggetta alla sola forza peso, per cui la risposta alla domanda 6 è una quota l_{max} tale che in essa la massa 2 abbia perso tutta la sua energia cinetica, convertendola in variazione di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}m_2 v_s^2 = m_2 g(l_{max} - l_0) \qquad (2)$$

Domanda 7: che succede se la massa 1 è nulla? Questa situazione equivale ad assumere che m_2 sia direttamente appoggiata su un piatto di massa trascurabile connesso alla molla. Nulla cambia sulla posizione di distacco, che non dipende dal rapporto tra le due masse ma è sempre pari alla lunghezza a riposo della molla l_0. Nulla cambia neanche sulla velocità v_s, perché in questo caso $m = m_2$ essendo $m_1 = 0$. Combinando l'eq. 1 con l'eq. 2 si ha:

$$\frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 + m_2 g(l_1 - l_0) = m_2 g(l_{max} - l_0)$$ da cui

$$\frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 = m_2 g(l_{max} - l_1)$$

da cui si vede come tutta l'energia potenziale iniziale della molla sulla quale m_2 era appoggiata ferma viene convertita nella variazione di energia potenziale della stessa m_2 tra la quota iniziale l_1 e la quota finale l_{max}.