TEOREMA X sp. Banach. Allora

X separabile $\iff$ B^* è metrizzabile nella top. $*$-debole $\sigma(X^*, X)$

(ossia: esiste una metrica su B^* che induce su B^* la topologia $*$-debole).

DIM $\boxed{\text{solo } \Rightarrow}$

Se X è separabile $\Rightarrow$ PROP: ogni s.i di X separabile è separabile

$\Rightarrow B = \{x \in X \text{ t.c. } \|x\| \leq 1\}$ è separabile.

Sia $\{x_n\}$ numerabile e denso in B.

Se $f \in X^*$, definiamo

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{|\langle f, x_n \rangle|}_{\leq \|f\|_* \|x_n\| \leq \|f\|_*} < \infty$$

N.B. la serie converge ed è $\leq \|f\|_*$

$[f]$ è una norma

1) $[f] = 0 \Rightarrow \langle f, x_n \rangle = 0 \quad \forall n$

$\left.\begin{array}{l} x_n \text{ densi} \\ f \text{ continua} \end{array}\right| \Longrightarrow f \equiv 0.$

2) $[\lambda f] = |\lambda| \, [f]$ ovvia

3) $[f+g] \leq [f]+[g]$ ovvio.

Consideriamo la topologia indotta da questa norma e mostriamo che equivale su B^* a $\sigma(X^*,X)$.

In B^* ci sono ora due famiglie di intorni di f_0

1) Quelli relativi alla norma $[f]$.

$$U = \{f \in B^* : [f - f_0] < r\}$$

2) Quelli relativi alla topologia $*$-debole, che sappiamo essere del tipo.

$$V = \{f \in B^* : |\langle f - f_0, y_j \rangle| < \varepsilon \ , \ j = 1 \dots N\}$$

$$y_j \in X$$

Devo provare che ogni intorno del tipo V contiene un intorno del tipo U e viceversa

- Ogni intorno di tipo V contiene un intorno di tipo U

$$V = \{ f \in B^* : |\langle f - f_0, y_j \rangle| < \varepsilon, \ j = 1 \dots N \}$$

Eventualmente cambiando ε, posso supporre che

$y_j \in B$.
$\{x_n\}$ è denso $\Longrightarrow$ $\forall j$ trovo x_{n_j} t.c.
$$\| x_{n_j} - y_j \| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall j = 1 \dots N$$

Scelgo r t.c. $\quad r < \dfrac{\varepsilon}{2^{n_j + 1}} \quad \forall j = 1 \dots N$.

Mostro che con questa scelta di r, $U \subset V$

Se $f \in U \Longrightarrow \dfrac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| < r \quad \forall n$

In particolare ciò è vero per $n = n_j \quad j = 1 \dots N$

$$|\langle f - f_0, x_{n_j} \rangle| < 2^{n_j} r < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per la scelta di } r$$

$$|\langle f - f_0, y_j \rangle| \le \underbrace{|\langle f - f_0, y_j - x_{n_j} \rangle|}_{\substack{\wedge\!| \\ \underbrace{\underbrace{\| f - f_0 \|_*}_{\wedge\!| \ 2} \ \underbrace{\| y_j - x_{n_j} \|}_{\wedge \ \varepsilon/4}}_{\wedge \ \varepsilon/2}}} + \underbrace{|\langle f - f_0, x_{n_j} \rangle|}_{\wedge \ \varepsilon/2} < \varepsilon$$

$\forall j = 1 \dots N$

- Viceversa, fissato un intorno di tipo U, esiste un intorno di tipo V contenuto in U.

Prendo V della forma

$$V = \{ f \in B^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, \ i = 1 \dots k \}$$

(ε e k da fissare). $\varepsilon < \frac{r}{2}$, $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$

$$[f - f_0] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\langle f - f_0, x_i \rangle| =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \underbrace{|\langle f - f_0, x_i \rangle|}_{\wedge \ \varepsilon}}_{\wedge \ \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \ \wedge \ \varepsilon} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \underbrace{|\langle f - f_0, x_i \rangle|}_{\leq \ \underbrace{\|f - f_0\|_*}_{\leq 2} \underbrace{\|x_i\|}_{\leq 1}}}_{\leq \ 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}}$$

scelgo $\varepsilon < \frac{r}{2}$

Scelgo k t.c. $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$

CONSEGUENZE

1) Ovviamente se X è separabile anche ogni palla $\{f \in X^* : \|f\|_* \leq r\}$ è metrizzabile nella topologia $*$-debole.

2) **TEOREMA** X sp. di Banach separabile (f_n) succ.ne limitata in X^*. Allora esiste una sottosucc.ne $*$-debolmente convergente.

DIM. Supp. $\|f_n\| \leq r$. La palla $\{f \in X^* : \|f\|_* \leq r\}$ è $*$-deb. compatta e $*$-deb. metrizzabile $\Rightarrow$ seq.te compatta $\Rightarrow$ la tesi.

3) **TEOREMA** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile

Allora ogni succ.ne limitata in $L^\infty(\Omega)$ ammette una sottosucc.ne che converge $*$-deb. in $L^\infty(\Omega)$

(oss. se $|\Omega| < \infty$, questo implica la convergenza debole in $L^p(\Omega)$ $\forall p < \infty$)

Dim $X = L^1(\Omega)$ separabile

Enunciato "duale" del precedente teorema di metrizzabilità

TEOREMA Sia X^* separabile, allora B_X è metrizzabile nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$.

(dim. quasi uguale: esercizio).

TEOREMA Ω s.i. misurabile di $\mathbb{R}^N$

Ogni succ^{ne} limitata in $L^p(\Omega)$ $1 < p < \infty$ ammette una sottosucc^{ne} deb. convergente.

DIM. $X = L^{p'}(\Omega)$ $\qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

X separabile, $X^* = L^p(\Omega)$

$\Rightarrow$ ogni succ^{ne} limitata in $L^p(\Omega)$ ammette una sottosucc^{ne} $*$-deb. convergente in $L^p(\Omega)$

Ma X è riflessivo $\Rightarrow$ le topologie debole e $*$-debole coincidono in X^*

$\Rightarrow$ la convergenza è debole

TEOREMA X sp. di Banach.

X^* separabile $\Longrightarrow$ X separabile

OSS Il viceversa è falso

$X = L^1(\Omega)$ è separabile, ma $X^* = L^\infty(\Omega)$ non è separabile

Dim. teorema

Sia $\{f_n\}$ numerabile e denso in X^*

Poiché $\|f_n\|_* = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \langle f_n, x \rangle$

$\Rightarrow \forall n \quad \exists \; x_n \in X : \quad \|x_n\| \leq 1,$

$$\langle f_n, x_n \rangle \geq \frac{\|f_n\|_*}{2}$$

Voglio provare che

$L = \text{span}\{x_n\} = \{$combinazioni lineari finite degli $x_n\}$
(non è ancora numerabile) è denso in X.

L sottospazio di X, per provare che è denso provo che se $f \in X^*$ si annulla su L, allora $f \equiv 0$ (conseguenza di Hahn-Banach).

Supponiamo $f \in X^*$, $f \equiv 0$ su L.

$\{f_n\}$ denso in X^*. Fissiamo $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists N$ t.c. $\|f - f_N\|_* < \varepsilon$

$$\frac{\|f_N\|_*}{2} < \langle f_N, x_N \rangle = \langle f_N - f, x_N \rangle + \underbrace{\langle f, x_N \rangle}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \leq$$

$$\leq \|f_N - f\|_* \, \|x_N\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f_N\|_* < 2\varepsilon$.

$$\|f\|_* \leq \|f - f_N\|_* + \|f_N\|_* < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f\|_* = 0$

A questo punto approssimo gli elementi di L con $L_0 = \{$combinaz. lineari finite di x_n a coeff^{ti} razionali$\}$

$\Rightarrow$ anche L_0 è denso.

L_0 è numerabile, in quanto

$$L_{0,n} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \, , \quad q_k \in \mathbb{Q} \right\} \text{ numerabile}$$

e $L_0 = \bigcup_n L_{0,n}$ unione numerabile di numerabili

$\square$

OSS se si prova a ripetere la dim del teorema "duale"

$$X \text{ separabile} \Rightarrow X^* \text{ separabile}$$

ci si blocca all' appl. di Hahn-Banach perché si riesce solo a dim. che

$$\langle x, f_n \rangle = 0 \quad \forall n \Rightarrow x = 0$$

ma questi non sono tutti i funzionali su X^*.

Ma se X è riflessivo, allora sono tutti i funzionali.

Quindi

TEOREMA

X riflessivo e separabile $\Rightarrow$ X^* separabile

TEOREMA (Kakutani)

X sp. di Banach.

X riflessivo $\Longleftrightarrow$ la palla unitaria chiusa
$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$
è debolmente compatta
(compatta nella top. $\sigma(X, X^*)$)

Conseguenza immediata (la miglioreremo)

X riflessivo, X^* ~~separabile~~ ← in realtà vedremo che non serve.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

B_R compatta $\qquad$ B_R metrizzabile nella top. debole

$\Rightarrow$ da ogni succ^ne^ $\{x_n\}$ limitata in X
si può estrarre una sottosucc^ne^ deb^te^
convergente.

Dim $\boxed{\text{solo} \Rightarrow}$

iniezione canonica isometria

X riflessivo $\Rightarrow$ $J(X) = X^{**}$

$\Rightarrow$ $J(B) = B^{**}$

D'altra parte [Banach-Alaoglu] B^{**} è $*$-deb. compatta $\sigma(X^{**}, X^{*})$.

$B = J^{-1}(B^{**})$ Proverò che J^{-1} è continua nelle topologie interessate

Una funzione continua trasporta compatti in compatti

B è compatto in $\sigma(X, X^*)$ se J^{-1} è continua da

$$(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \xrightarrow{J^{-1}} (X, \sigma(X, X^*))$$

devo provare che, $\forall f \in X^*$ si ha

$f \circ J^{-1}$ è continua da $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ a $\mathbb{R}$.

Sia $\xi \in X^{**} \Rightarrow \xi = \xi_x$

$$(f \circ J^{-1})(\xi_x) = f(J^{-1}(\xi_x)) = \langle f, x \rangle = $$
$$= \langle \xi_x, f \rangle$$

e la mappa $\xi \longrightarrow \langle \xi, f \rangle$ è continua in $\sigma(X^{**}, X^*)$ per def^{ne} di top. $*$-debole.