Problema dei due corpi (FMUV 7.10)

c.d.m. dei due corpi: $\vec{r}_C = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

definiamo la posizione relativa e le sue derivate:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1; \quad \vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

In S' (O' ≡ C), introducendo la massa ridotta $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

abbiamo

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_C = r_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2} = -\vec{r}\frac{\mu}{m_1}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_C = r_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1}{m_1 + m_2} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \vec{r}\frac{\mu}{m_2}$$

(ritroviamo la regola che le distanze delle due masse dal c.d.m. sono inversamente proporzionali alle due masse)

Problema dei due corpi (2)

Per le velocità si ha: $\vec{v}'_1 = -\dfrac{\mu}{m_1}\vec{v}, \quad \vec{v}'_2 = \dfrac{\mu}{m_2}\vec{v}$

il che si traduce in una importantissima proprietà per le quantità di moto:

$$\vec{q}'_1 = m_1\vec{v}'_1 = -\mu\vec{v}, \quad \vec{q}'_2 = m_2\vec{v}'_2 = \mu\vec{v}$$

Abbiamo quindi $\vec{q}'_2 = -\vec{q}'_1 = \mu\vec{v}$

Le quantità di moto nel c.d.m.sono uguali ed opposte

Il momento angolare intrinseco è dato da

$$\vec{P}_C = \vec{r}'_1 \times \vec{q}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{q}'_2 = (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \times \mu\vec{v} = \vec{r} \times \mu\vec{v}$$

L'energia cinetica totale nel c.d.m. diventa:

$$K' = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2}\mu^2 v^2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

Moto relativo dei due corpi (FMUV 7.11)

Se il sistema è isolato, le sole forze agenti saranno

$$\vec{f}_{21} = m_1 \vec{a}'_1; \quad \vec{f}_{12} = m_2 \vec{a}'_2 \quad \text{con} \quad \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \vec{f}$$

da cui $$\vec{a} = \vec{a}'_2 - \vec{a}'_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{f} = \frac{\vec{f}}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = \mu \vec{a}$$

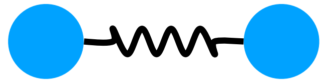
la cui soluzione è il moto di un punto di massa μ soggetto alla forza di interazione f.

Attraverso le relazioni precedenti, il problema di un sistema a due corpi si riduce quindi allo studio del moto di uno dei due punti rispetto all'altro, considerando come forza agente la forza di interazione e come massa del punto la massa ridotta.

Nel caso particolare in cui $m_1 \gg m_2$ (es. Sole e Terra), m_1 è praticamente fermo e $\mu \approx m_2$, per cui il c.d.m. del sistema Terra-Sole coincide praticamente col Sole e la Terra si muove in un campo gravitazionale con origine fissa nel Sole.

(Si noti che la massa ridotta può andare da $m/2$ per due masse uguali al valore della massa più piccola se $m_2 << m_1$)

Due corpi collegati da una molla



Consideriamo che il moto dei due corpi si svolga sempre nella direzione della congiungente i due corpi.

Consideriamo dapprima due corpi di massa uguale: la massa ridotta in questo caso è data da

$$\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

$$f = -k(l - l_0) = -kx$$

$$f = \mu a \Rightarrow \quad -kx = \mu \ddot{l} = \mu \ddot{x}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Se ora consideriamo due masse diverse, il moto di ciascuna delle due masse è ancora un moto armonico, di frequenza diversa dalla precedente, perché è diversa la massa ridotta, ma la legge oraria rappresenterà sempre un moto armonico (es. $m_1 \gg m_2$)

Inoltre le oscillazioni delle due masse rispetto al c.d.m. avranno ampiezze inversamente proporzionali alle due masse. Ricordiamo infatti che:

$$\vec{r}\,'_1 = \vec{r}\,\frac{\mu}{m_1}; \quad \vec{r}\,'_2 = -\vec{r}\,\frac{\mu}{m_2}$$