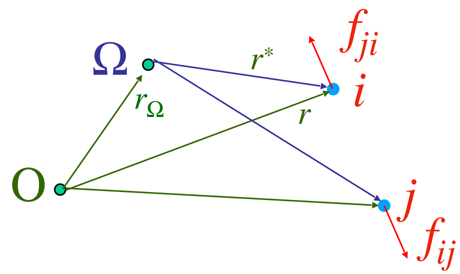
Momento angolare di un sistema (FMUV 7.4)

Momento angolare totale $\vec{P}_\Omega = \sum \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i^* \times \vec{q}_i$ $\qquad \vec{r}^* = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$

Usando il teorema del momento angolare $\vec{m}_i = \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_i$

$$\frac{dP_\Omega}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum (\vec{m}_i - \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_i) = \vec{M} - \vec{v}_\Omega \times \vec{Q}$$



Anche in questo caso, il momento risultante delle forze comprende solo le forze esterne, infatti per le forze interne possiamo scrivere

$$\vec{M}^i = \sum_{i,j} \vec{r}_i^* \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j^* \times \vec{f}_{ij} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*) \times \vec{f}_{ji} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = 0$$

poiché per il principio di azione e reazione le due forze hanno la stessa retta di azione, ossia sono dirette secondo la congiungente dei due punti materiali $\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^* = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

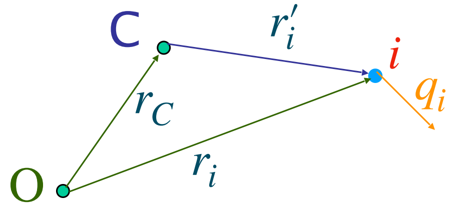
Se Ω è fisso o coincide col c.d.m., $\vec{v}_\Omega \times \vec{Q} = 0$

e abbiamo la seconda equazione cardinale:

$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

In conseguenza, per un sistema isolato il momento angolare rispetto ad un polo fisso o al c.d.m. si conserva.

Terzo teorema del c.d.m.



Considerando un sistema di coordinate Σ_C centrato nel c.d.m., possiamo scrivere (essendo $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i'$)

$$\vec{P}_O = \sum (\vec{r}_C + \vec{r}_i') \times \vec{q}_i = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \sum \vec{r}_i' \times \vec{q}_i = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{P}_C$$

che esprime il terzo teorema del c.d.m.:

"il momento angolare totale di un sistema rispetto all'origine delle coordinate (o rispetto ad un generico polo fisso) è dato dalla somma del momento angolare totale rispetto al c.d.m. $\vec{P}_C$ e del momento angolare rispetto all'origine che avrebbe il c.d.m. se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema."

Si noti che il terzo teorema del c.d.m. implica anche che il momento angolare di un sistema (a differenza della quantità di moto totale) non è uguale a quello di un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema solidale col centro di massa.

A questo va aggiunto infatti $\vec{P}_C$, momento angolare del sistema rispetto al suo c.d.m.

Ricapitolazione sui sistemi

Prima equazione cardinale	$\vec{F}^e = \dfrac{d\vec{Q}}{dt}$	definizione di $\vec{Q} = \sum \vec{q}_i$ + terzo principio
Seconda equazione cardinale	$\vec{M}^e = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	definizione di $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ + terzo principio + polo fisso o c.d.m.
Centro di massa	$\vec{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$	
Primo teorema del c.d.m.	$\vec{Q} = M\vec{v}_C$	
Secondo teorema del c.d.m.	$\vec{F}^e = M\dfrac{d\vec{v}_C}{dt} = M\vec{a}_C$	
Terzo teorema del c.d.m.	$\vec{P}_O = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{P}_C$	

Terzo principio della dinamica (FMUV 7.6)

Le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} \qquad\qquad \vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

sono state derivate dal terzo principio della dinamica.

Da esse segue che per un sistema isolato si conservano la quantità di moto ed il momento angolare.

In realtà le basi sperimentali di queste due leggi di conservazione sono molto più vaste di quelle del principio di azione e reazione, essendo verificate anche a livello microscopico (dove non sarebbe possibile fare misure classiche di forza) e senza ricorrere all'ipotesi di azione a distanza, richiesta dalla formulazione newtoniana del principio di azione e reazione, ma incompatibile con la relatività ristretta.

Nell'elettrodinamica delle cariche in moto è facile costruire esempi nei quali il principio di azione e reazione con propagazione istantanea delle forze è effettivamente violato.

Leggi di conservazione

Le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare per un sistema isolato possono essere considerate come la formulazione moderna del terzo principio della dinamica.

Da esse, applicate ad un sistema isolato di due corpi (sul quale non agiscono dunque né forze né momenti di forze esterne), si ricava infatti immediatamente il principio di azione e reazione newtoniano:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2} \vec{f}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2} \vec{m}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{m}_1 = -\vec{m}_2$$

La seconda derivazione implica che le due forze devono agire lungo la stessa retta di azione

Sistemi di forze parallele. Baricentro (FMUV 7.7)

Sistemi di forze parallele (es. forza peso) $\vec{f}_i = f_i \hat{u}$

La risultante delle forze sarà $\vec{F} = \sum f_i \hat{u} = \hat{u} \sum f_i$

Per il risultante dei momenti si ha: $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \left(\sum f_i \vec{r}_i\right) \times \hat{u}$

e definendo $\vec{r}_f = \dfrac{\sum f_i \vec{r}_i}{\sum f_i}$ centro delle f. parallele

si ha $\vec{M} = \left(\sum f_i\right) \vec{r}_f \times \hat{u} = \vec{r}_f \times \vec{F}$

per cui, considerando la forza risultante applicata in r_f, questa avrà lo stesso risultante dei momenti del sistema di forze parallele, e dunque lo stesso effetto sulla quantità di moto e sul momento angolare del sistema

Altri esempi di sistemi di forze parallele:

- accelerazione di trascinamento traslatorio
- reazioni vincolari di un vincolo piano

Nel caso della forza peso $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$

e per g costante, r_f (detto baricentro) coincide col c.d.m.

Moto rispetto al c.d.m. **(FMUV 7.8)**

Dalla I equazione cardinale si ricava tutta l'informazione possibile sul moto del c.d.m.

Cosa possiamo dire del residuo moto del sistema rispetto al c.d.m.?

Introduciamo le coordinate rispetto al c.d.m. $\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_C$ scegliendo gli assi di O' paralleli a quelli di O per cui $\vec{v}\,'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$

Come si esprimono le altre grandezze globali?

- dalla definizione di c.d.m. $\sum m_i \vec{r}\,'_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\,'_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}\,' = 0$
- calcoliamo il momento angolare

$$\vec{P}\,'_C = \sum \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{v}\,'_i = \sum \vec{r}\,'_i \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = \sum \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{v}_i - \underbrace{\sum m_i \vec{r}\,'_i}_{=0} \times \vec{v}_C = \sum \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{P}_C$$

il momento angolare rispetto al c.d.m. è indipendente dal riferimento: momento angolare intrinseco.

Nel terzo teorema del c.d.m., che dice che il momento angolare totale si può esprimere come $\vec{P}_\Omega = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{P}_C$

compare quindi il momento angolare intrinseco.

Il terzo teorema pende anche il nome di teorema di Koenig per il momento angolare

Energia di un sistema **(FMUV 7.9)**

Energia cinetica

$$K=\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2+\frac{1}{2}Mv_C^2+\overbrace{\left(\sum m_i v_i'\right)}^{=0}v_C=K'+\frac{1}{2}Mv_C^2$$

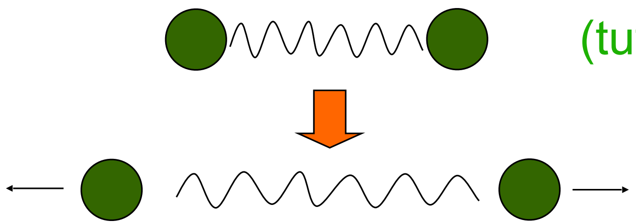
(terorema di Koenig per l'energia cinetica)

L'energia cinetica di un sistema non corrisponde a quella che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel c.d.m.

Teorema delle forze vive $\sum \delta L_i=\sum dK_i$

anche le forze interne compiono lavoro $\delta L=\delta L^e+\delta L^i=dK$

Un esempio in cui il lavoro delle forze interne cambia l'energia cinetica totale del sistema:



(tutto fermo)

Se le forze interne ed esterne sono conservative possiamo introdurre V^e e V^i

e l'energia totale meccanica diventa $E_m=K+V^e+V^i$

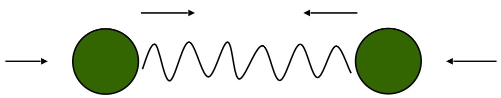
Se ci sono forze non conservative $dE_m=d(K+V^e+V^i)=\delta L^{NC}$

Commenti ed esempi

A differenza dell'esempio precedente, non c'è relazione tra

- lavoro delle forze interne e energia nel c.d.m.
- lavoro delle forze esterne e energia del c.d.m.

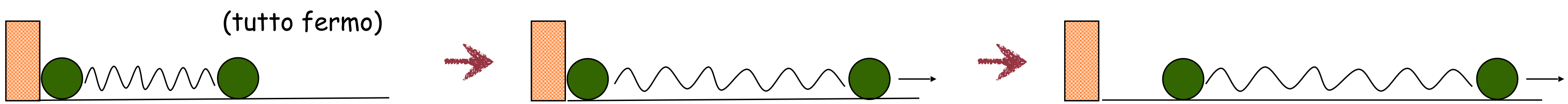
Esempio 1 : "molle" per esercizi per rafforzare le mani

f_1^e  f_2^e

$$\delta L_1 > 0; \delta L_2 > 0 \Rightarrow \delta L^e > 0 \qquad \frac{1}{2} M v_C^2 = 0$$

tutto il lavoro delle forze esterne va in energia potenziale (interna)

Esempio 2 :



L'energia potenziale interna tramite il lavoro delle forze interne ha fatto variare l'energia cinetica del c.d.m. (chi ha fatto variare Q?)

Lo stesso avviene in tutti i meccanismi di locomozione tramite attrito, come nel camminare: è l'attrito che fornisce la forza esterna necessaria a spostare il c.d.m., ma l'energia necessaria è fornita dall'energia muscolare interna.