Topologia $*$-debole su X^*. $\sigma(X^*, X)$

Si vede (con discorsi analoghi a quelli già fatti per la topologia debole) che una base di intorni per $\sigma(X^*, X)$ è data dagli intorni del tipo

$$V = \{ f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon \ , i = 1 \dots N \text{ per } x_i \in X \text{ fissati} \}$$

DEF $\{f_n\} \subset X^*$. Diremo che f_n converge $*$-debolmente a $f \in X^*$ se f_n converge a f nella topologia $\sigma(X^*, X)$.

PROP. Siano $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$. Allora:

1) $f_n \xrightarrow{*} f \iff \langle f_n, x \rangle \xrightarrow{n} \langle f, x \rangle \ \forall x \in X$

2) $f_n \xrightarrow{*} f \implies \|f_n\|_{X^*} \leq C$, e

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_n \|f_n\|_{X^*}$$

3) $\left. \begin{array}{l} x_n \to x \text{ in } X \text{ forte} \\ f_n \xrightarrow{*} f \text{ in } X^* \ *\text{-deb} \end{array} \right\} \implies \langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$

Dim per esercizio

TEOREMA di BANACH-ALAOGLU

X sp. di Banach

La palla unitaria chiusa di X^*:

$$B^* = \{ f \in X^* \text{ t.c. } \|f\|_{X^*} \leq 1 \}$$

è compatta nella topologia $\sigma(X^*, X)$.

(B^* è $*$-debolmente compatta)

Dim Consideriamo lo spazio

$$Y = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$$

$$Y = \{ \omega = \{\omega_x\}_{x \in X} : \omega_x \in [-\|x\|, \|x\|] \}$$

Dotiamo Y della topologia prodotto (cioè la topologia meno fine che rende continue le proiezioni

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \omega_x \end{aligned}$$

Teor di Tychonov: Y è compatto con questa topologia

Considero

$$\begin{aligned} \Phi : \quad B^* &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto \Phi(f) = \{\langle f, x \rangle\}_{x \in X} \end{aligned}$$

oss $\langle f, x \rangle \in [-\|x\|, \|x\|]$ perché $\|f\|_{X^*} \leq 1$.

Chiaramente ϕ è iniettiva. (per def^ne di funzione)

$\Rightarrow$ resta definita

$$\phi^{-1} : \operatorname{Im}(\Phi) \subset Y \longrightarrow B^*$$

1) Φ continua da B^* (con top. $*$-deb) in Y.

Basta verificare che

$$\varphi_x \circ \Phi : \quad B^* \longrightarrow [-\|x\|, \|x\|]$$

top. $*$- deb.

è continua $\forall x \in X$.

$(\varphi_x \circ \Phi)(f) = \langle f, x \rangle$ e questa è per definizione continua da $(X^*, \sigma(X^*, X))$ a $\mathbb{R}$

2) $\phi^{-1} : \operatorname{Im}\phi \subset Y \longrightarrow (B^*, \sigma(X^*, X))$

è continua. Devo provare che

$\forall x \in X$ si ha

$$J_x \circ \phi^{-1} : \operatorname{Im}\phi \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

$$\{\langle f, y \rangle\}_{y \in X} \longrightarrow \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$$

ma questa composizione è proprio la x-esima proiezione

$\Rightarrow$ continua per def^ne di topologia prodotto.

$$\Rightarrow \phi : (B^*, \sigma(X^*, X)) \longrightarrow \operatorname{Im}\phi \subset Y$$

è un omeomorfismo,

Se provo che $\operatorname{Im}\phi$ è compatta in Y,
allora $\phi^{-1}(\operatorname{Im}\phi) = B^*$ è compatto
nella top. $*$-debole perché
una f. continua manda compatti in compatti.

Y compatto, $\operatorname{Im}\phi \subset Y$, se mostro che
$\operatorname{Im}\phi$ è chiuso allora è compatto (s.i. chiuso di un compatto)

$\omega \in \operatorname{Im}\phi \iff \omega = \{\omega_x\}_{x\in X} = \underbrace{\{\langle f, x\rangle\}_{x\in X}}_{\in Y}$ con
$f \in X^*$, $\|f\|_{X^*} \le 1$.

Affinché $\omega \in \operatorname{Im}\phi$ basta verificare che rispetta la linearità

$$\omega_x + \omega_y = \omega_{x+y} \qquad \forall x, y \in X$$

$$\lambda\omega_x = \omega_{\lambda x} \qquad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se fisso $x, y \in X$, l'insieme
$A_{x,y} = \{\omega \in Y : \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y\}$ è chiuso
(in quanto la funzione $\omega \longmapsto \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$ è continua),
In modo simile, se fisso $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$, l'insieme
$B_{x,\lambda} = \{\omega \in Y : \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x\}$ è chiuso

Si conclude osservando che

$$\operatorname{Im}\phi = \left(\bigcap_{x,y\in X} A_{x,y}\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ x\in X}} B_{\lambda,x}\right)$$

è chiuso (intersezione di chiusi) $\square$

OSS La compattezza di B^* in $\sigma(X^*, X)$ non è la stessa cosa della sequenziale compattezza

Compattezza $\iff$ ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricopr. finito

seq. compattezza $\iff$ ogni successione ammette una sottosucc^{ne} convergente.

I due concetti coincidono se lo spazio è uno sp. metrico, ma sono "sghembi" se lo spazio è più generale.

OSS le topologie deboli e $*$-deboli non sono metrizzabili.

Sia $X = \ell^\infty$

Abbiamo provato che B^* è $*$-debolmente compatto

Mostriamo ora che B^* non è sequenzialmente $*$-deb compatto.

Esibiamo una successione $\{f_n\} \subset B^*$ da cui non posso estrarre sottosucc^{ni} $*$-deb. convergenti.

$f_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ la n-esima proiezione

$$\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto x_n$$

- f_n è lineare
- f_n è continua $\qquad |x_n| \leq \sup_i |x_i| = \|x\|_\infty$

$\|f_n\|_* \leq 1$.

Anzi, prendendo $\underline{x} = \{1, 1, 1, \dots\}$

$$f_n(\underline{x}) = 1 = \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_{X^*} = 1.$$

Supponiamo, per assurdo, che esista una sottosucc^{ne} $\{f_{n_k}\}$ $*$-deb. convergente $\iff$

$$\underbrace{\langle f_{n_k}, \underline{x} \rangle}_{x_{n_k}} \longrightarrow \langle f, \underline{x} \rangle \qquad \forall x \in \ell^\infty$$

Ho trovato una succ^{ne} di indici $\{n_k\}$

t.c., presa una qualsiasi $\underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in ℓ^∞, $\{x_{n_k}\}$ converge

Questo è ovviamente assurdo.

Questo controesempio è legato al fatto che $X = \ell^\infty$ non è separabile

Mostreremo che

<u>TEOREMA</u> X separabile $\Longleftrightarrow$ la topologia $*$-debole di B^* è metrizzabile.

cioè: possiamo trovare una metrica su B^* che dà la topologia $*$-debole

$\Rightarrow$ seguirà che ogni successione limitata in X^* ammette una sottosucc^{ne} $*$-deb. convergente.

DEF X sp. metrico si dice <u>separabile</u> se esiste un s.i. numerabile e denso in X.

<u>Esempi</u>

ℓ^p con $1 \leq p < \infty$ è separabile.

L^p $1 \leq p < \infty$ è separabile

$W^{1,p}(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$ è separabile

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

$C(\overline{\Omega})$ è separabile.

ℓ^∞ non è separabile

L^∞ non è separabile.

$W^{1,\infty}(\Omega)$ " " "

ℓ^1 è separabile

Infatti l'insieme delle successioni a valori razionali e definitivamente nulle è un insieme numerabile denso in ℓ^1.

Lo stesso metodo funziona in ℓ^p $1 < p < \infty$.

ℓ^∞ non è separabile. Fissata una qualunque succ^{ne} $\{\underline{x}^{(n)}\}$ di ℓ^∞, trovo un elemento $\underline{x} \in \ell^\infty$ t.c. $\| \underline{x} - \underline{x}^{(n)} \|_\infty \geq 1 \quad \forall n$

Prendo $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$x_i = \begin{cases} 0 & |x_i^{(i)}| \geq 1 \\ 2 & |x_i^{(i)}| < 1 \end{cases}$$

In questo modo $\|\underline{x} - \underline{x}^{(i)}\|_\infty \geq |x_i - x_i^{(i)}| \geq 1$

$\forall i$

$L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < \infty)$ è separabile.

L'insieme denso e numerabile è dato da

$$Y = \left\{ f(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \chi_{R_k}(x) \right\}$$

al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{Q}$

R_k parallelepipedo della forma $\prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$

con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$

(dettagli [$\longrightarrow$ Brezis])

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, $1 \le p < \infty \Longrightarrow$

$L^p(\Omega)$ è separabile.

(si identifica $L^p(\Omega)$ con il s.i. di $L^p(\mathbb{R}^N)$

delle funzioni che sono q.o. nulle in Ω^c.

e uso il fatto che ogni s.i. di uno sp metrico

separabile è separabile.

Ancora più in generale

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura si dice

separabile se esiste una famiglia numerabile $\{E_n\}$ di s.i. di X che genera la σ-algebra $\mathcal{M}$

(cioè $\mathcal{M}$ è la più piccola σ-algebra contenente gli $\{E_n\}$)

Con questa ipotesi e con l'ipotesi supplementare che la misura sia σ-additiva, $L^p(X)$ $(1 \leq p < \infty)$ è separabile

PROP

Sia X sp. metrico separabile. Allora ogni s.i. di X è separabile

DIM. Sia $\{x_n\}$ denso in X. Sia $F \subset X$.

$\forall n, m \in \mathbb{N}$, considero $B(x_n, \frac{1}{m}) \cap F$.

se l'intersezione non è vuota, prendo

$$a_{n,m} \in B(x_n, \tfrac{1}{m}) \cap F.$$

è un s.i. numerabile di F. Provo che è denso in F.

Sia $x \in F$, sia $r > 0$. Voglio mostrare che $\exists\, a_{n,m}$ t.c. $d(x, a_{n,m}) < r$.

Fisso m t.c. $\frac{2}{m} < r$

$\exists\, x_n$ t.c. $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$ (x_n è denso)

D'altra parte $B(x_n, \frac{1}{m}) \cap F$ è non vuoto (contiene x)

$$\Rightarrow \exists\, a_{n,m} \in B(x_n, \tfrac{1}{m}) \cap F.$$

$$d(x, a_{n,m}) \leq \underbrace{d(x, x_n)}_{< 1/m} + \underbrace{d(x_n, a_{n,m})}_{< 1/m} < \frac{2}{m} < r$$