X sp. topologico $\varphi: X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$

DEF φ è semicontinua inferiormente $(s.c.i. = \ell.s.c)$

se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$[\varphi \le \lambda] = \{x \in X : \varphi(x) \le \lambda\}$$

è chiuso.

verificare

φ s.c.i $\iff \forall x \in X$ $\exists$ intorno V di x

t.c. $\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon \quad \forall y \in V$

verificare

φ s.c.i $\Longrightarrow \forall x_n \longrightarrow x$ in X si ha

$$\varphi(x) \le \liminf_n \varphi(x_n)$$

($\Longleftarrow$ se X è uno sp. metrico).

Vale il Teorema di Weierstrass.

verificare

$\left.\begin{array}{l} X \text{ compatto} \\ \varphi \text{ s.c.i.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi$ ammette min. assoluto

Per sempl. X sp. metrico.

Sia $\{x_n\}$ t.c. $\varphi(x_n) \longrightarrow \inf_X \varphi$

compattezza $\Rightarrow$ estraggo una sottosucc^{ne} conv. $x_{n_k} \to x$

s.c.i $\Rightarrow \varphi(x) \le \liminf_k \varphi(x_{n_k}) = \inf \varphi$

X sp. vettoriale

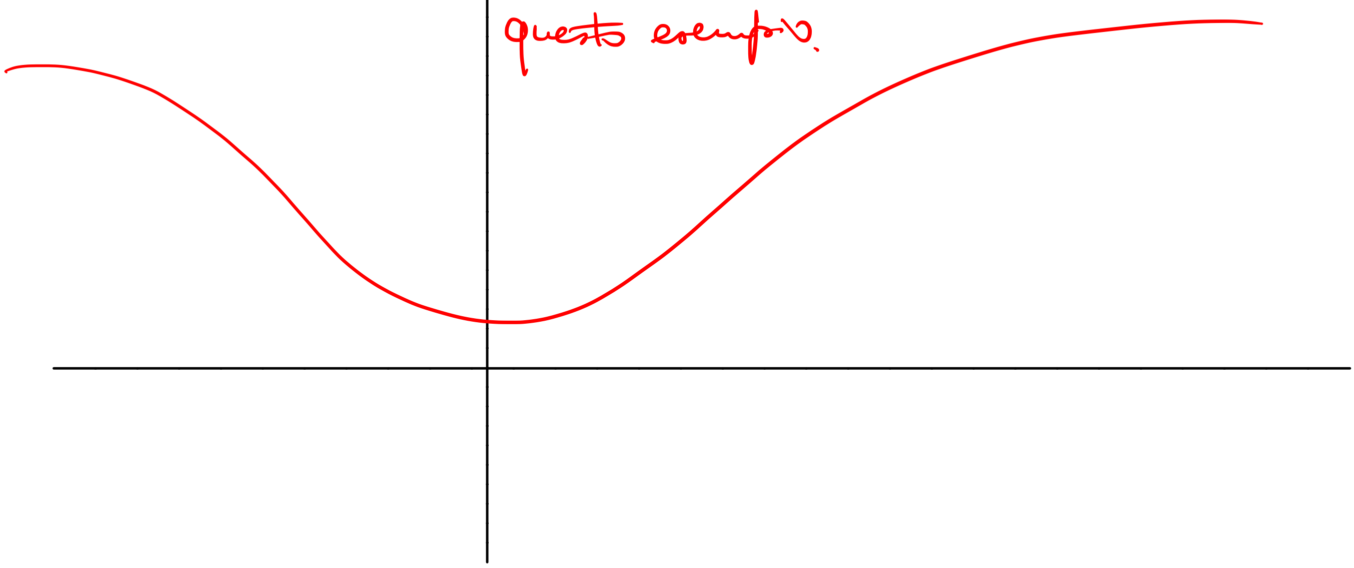
DEF $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ si dice convessa se

$$\varphi(tx + (1-t)y) \le t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y)$$

$$\forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0,1)$$

φ convessa $\Longrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : \varphi(x) \le \lambda\}$ è convesso.

Non vale il viceversa, come mostra questo esempio.



TEOREMA X sp. di Banach

$\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ convessa e s.c.i forte

$\Rightarrow \varphi$ s.c.i debole

($\Leftarrow$ sempre vero, anche senza convessità)

DIM. Dobbiamo provare che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x : \varphi(x) \leq \lambda\}$ è un chiuso debole

Ma questo è $\left.\begin{matrix}\text{chiuso forte} \\ \text{convesso}\end{matrix}\right] \Rightarrow$ chiuso debole

$\square$

Nelle applicazioni si ragiona spesso così:

$\left.\begin{matrix}\varphi \text{ continua forte} \\ \text{convessa}\end{matrix}\right| \longrightarrow \varphi$ s.c.i debole

Esempio (già visto)

$\varphi(x) = \|x\|$ continua forte e convessa (per la dis. triang.)

$\|x\|$ s.c.i. debole

$\Rightarrow$ se $x_n \rightharpoonup x$, allora $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$

TEOREMA X, Y sp. di Banach

$T: X \to Y$ lineare.

Allora

T è continua da X forte in Y forte

$\iff$ T è continua da X debole in Y debole

(Senza l'ipotesi di linearità le due cose non sono confrontabili:

indebolire la topologia di arrivo "migliora" la co tà

" " " "partenza" "peggiora" "

In altre parole, il teor. dice:

T fortemente continua $\iff$ T deb. continua

LEMMA T debolmente continua da X in Y

$\iff$ $\forall g \in Y^*$ $g \circ T : X \longrightarrow \mathbb{R}$

è debolmente continua da X in $\mathbb{R}$.

DIM $\boxed{\Rightarrow}$ ovvio perché $g \circ T \in X^*$

oppure osservando che $g \circ T$ è una composizione di debolmente continue.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $g \in Y^*$, allora $\forall$ aperto U di $\mathbb{R}$

si ha $g^{-1}(U)$ aperto debole di Y, per def.

Sappiamo che $(g \circ T)^{-1}(U) = T^{-1}(g^{-1}(U))$

aperto debole di X.

D'altra parte ogni aperto debole V di Y si può scrivere come unione arbitraria di intersezioni finite di elementi del tipo $g^{-1}(U)$ con $g \in Y^*$, U aperto di $\mathbb{R}$.

$$V = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{\text{finita}} g_j^{-1}(U_j) \right)$$

$$T^{-1}(V) = T^{-1}\left(\bigcup_{\text{arbitraria}} \left(\bigcap_{\text{finita}} g_j^{-1}(U_j) \right) \right) =$$

$$= \underbrace{\bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \underbrace{T^{-1}(g_j^{-1}(U_j))}_{\text{aperti deboli di } X}}_{\text{aperto debole}}$$

$\square$ Lemma.

Più in generale si ha

sp. topologici

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\varphi_i} V_i \qquad i \in I$$

sp. top.

lo doto della topologia meno fine che rende continue le φ_i.

Allora T continua $\Longleftrightarrow$ $T \circ \varphi_i$ continua $\forall i$

Dim teorema

T continua forte $\Longrightarrow$ $\forall g \in Y^* \quad g \circ T : X \to \mathbb{R}$ continua forte

$\to \quad g \circ T \in X^*$

$\Longrightarrow \quad g \circ T$ continua debole $\forall g \in Y^*$

(Lemma) $\Longrightarrow$ T continua debole.

$\Leftarrow$

T continua debole $\Longrightarrow$ graf T chiuso in $X \times Y$ dotato del prodotto delle topologie deboli.

<u>OSS</u> Il prodotto delle topologie deboli coincide con la topologia debole del prodotto.

(su questo si vedano gli appunti sulla pagina web del corso: essenzialmente si basa sull'osservazione che ogni funzionale lineare e continuo su $X \times Y$ si scrive come somma di un operatore di X^* e un operatore di Y^*)

$F : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua

$(x, y) \longmapsto F(x,y)$ lineare t.c.

$$|F(x,y)| \leq c \, \|(x,y)\| =$$
$$= c\left(\|x\|_X + \|y\|_Y\right)$$

$$F(x,y) = \underset{\substack{\parallel \\ F_1(x) \\ \cap \\ X^*}}{F(x,0)} + \underset{\substack{\parallel \\ F_2(y) \\ \cap \\ Y^*}}{F(0,y)}$$

$\Rightarrow$ graf T è un chiuso debole

$\Rightarrow$ graf T è un chiuso forte.

[Teorema del grafico chiuso] $\Rightarrow$ T è continua forte

$\square$

Topologia $*$-debole

X spazio di Banach. Consideriamo il duale X^*

Su X^* sono definite due topologie

1) La topologia forte

$f \in X^* \qquad \|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |\langle f, x \rangle|$

2) La topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$; è la più debole topologia che rende continue tutte i funzionali $g \in X^{**}$ su X^*

All'interno di X^{**} ci sono gli elementi che vengono dall'iniezione canonica di X in X^{**}

$$J: \quad X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto Jx$$

isometria.

$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle$

3) La topologia $\sigma(X^*, X)$ (topologia $*$-debole)

che è la più debole che rende continui tutti i funzionali J_x, cioè i funzionali

$$J_x : f \longmapsto \langle f, x \rangle$$

OSS Ovviamente questa topologia, se X è riflessivo, è uguale alla topologia debole.
In generale è ancora più debole

OSS se X è a dim. finita, tutte le topologie finora introdotte coincidono

Risultati sulla topologia $*$-debole (simili a quelli per la top. debole).

OSS Gli aperti della topologia $*$-debole sono le unioni arbitrarie delle intersezioni finite di insiemi della forma

$$\{ f \in X^* : \langle f, x \rangle \in U \} \qquad x \in X \quad U \text{ aperto di } \mathbb{R}$$

TEOREMA La topologia $*$-debole separa i pti di X^*.

Cioè: Presi $f_1, f_2 \in X^*$, $f_1 \neq f_2$, esistono due aperti $*$-deboli disgiunti A_1, A_2 t.c.

$$f_1 \in A_1 \quad , \quad f_2 \in A_2$$

Dim $\exists\, x \in X$ t.c.

$$\langle f_1, x \rangle \neq \langle f_2, x \rangle$$ per def di "funzioni diverse"
(non serve Hahn-Banach)

Supponiamo $\langle f_1, x \rangle < \langle f_2, x \rangle$

Scelgo $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\langle f_1, x \rangle < \alpha < \langle f_2, x \rangle$$

gli aperti sono

$$A_1 = \{ f \in X^* : \langle f, x \rangle < \alpha \}$$

$$A_2 = \{ f \in X^* : \langle f, x \rangle > \alpha \}$$ $\square$

TEOREMA (Banach-Alaoglu) X sp. di Banach

$\Rightarrow$ La palla unitaria chiusa di X^*, cioè

$$B^* = \{ f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1 \}$$

è compatta nella topologia $*$-debole.

(B^* è $*$-debolmente compatta)

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO $\quad \ell^p \qquad 1 < p < \infty$

Dimostrare che $\qquad \underline{x}^{(n)} = \{ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots \}$

$$\underline{x}^{(n)} \rightharpoonup \underline{x} \quad \text{debole} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \| \underline{x}^{(n)} \|_p \leq C \\ x_j^{(n)} \xrightarrow{n} x_j \quad \forall j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Ovvio: la limitatezza della norma è implicata sempre dalla convergenza debole.

La convergenza di $x_j^{(n)}$ a x_j si ottiene in quanto, preso $\underline{e}^{(j)} \in \ell^{p'}$

$$\langle \underline{e}^{(j)}, \underline{x}^{(n)} \rangle = \sum_i e_i^{(j)} x_i^{(n)} = x_j^{(n)}$$

$\downarrow$ conv. debole

$$\langle \underline{e}^{(j)}, \underline{x} \rangle = x_j$$

$\boxed{\Leftarrow}$ (sugg: moltiplicare prima per una succ^{ne} in c_{00})

succ^{ni} def^{te} nulle

Devo provare che, $\forall \underline{y} \in \ell^{p'}$ si ha

$$\langle \underline{y}, \underline{x}^{(n)} \rangle \xrightarrow{?} \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$$

$$\sum_i y_i x_i^{(n)} \qquad\qquad \sum_i y_i x_i$$

Se $\tilde{y} \in c_{00}$, allora $\exists N$ t.c. $\tilde{y}_j = 0 \ \forall j > N$

$$\langle \tilde{\underline{y}}, \underline{x}^{(n)} \rangle = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle \tilde{\underline{y}}, \underline{x} \rangle .$$

<u>OSS</u> c_{00} denso in $\ell^{p'}$,

Sia $y \in \ell^{p'}$, prendo $\underline{y}^{(k)} = \{y_1, y_2 \dots y_k, 0, \dots\} \in c_{00}$

$$\|\underline{y} - \underline{y}^{(k)}\|_{p'}^{p'} = \sum_{i=k+1}^{\infty} |y_i|^{p'} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

$$|\langle \underline{y}, \underline{x}^{(n)} \rangle - \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle| =$$

$$= \underbrace{|\langle \underline{y} - \underline{y}^{(k)}, x^{(n)} \rangle|}_{\leq \underbrace{\|\underline{y} - \underline{y}^{(k)}\|_{p'}}_{\text{piccolo se } k \text{ grande}} \underbrace{\|x^{(n)}\|_p}_{\leq C}} + \underbrace{|\langle \underline{y}^{(k)}, \underline{x}^{(n)} - \underline{x} \rangle|}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \forall k \text{ fix}} + \underbrace{|\langle \underline{y}^{(k)} - \underline{y}, \underline{x} \rangle|}_{\leq \|\underline{y}^{(k)} - \underline{y}\|_{p'} \|x\|_p \text{ (piccolo se } k \text{ grande)}} .$$

<u>OSS</u> $\underline{x} \in \ell^p$ per Fatou.

<u>Conv. ptuale</u> di $\underline{x}^{(n)}$ a $\underline{x}$

$$\sum_i |\underline{x}_i|^p \leq \liminf_n \sum |x_i^{(n)}|^p \leq C$$

hyp. 1.

Sia $f_n(x) = n e^{-nx}$ $\quad L^1(0,1)$

Provare che

1) $f_n \to 0$ q.o. $\quad$ ovvio!

2) $\{f_n\}$ limitata L^1

3) $f_n \not\to 0$ L^1 forte

4) $f_n \not\rightharpoonup 0$ L^1 debole

5) f_n non converge in L^1 debole (a niente)

dim. 2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n e^{-nx}\,dx = -e^{-nx}\Big|_0^1 =$

dim 3) $\quad = 1 - e^{-n} < 1.$

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow 1$$

dim 4). Basta prendere $g \equiv 1 \in L^\infty$

$$\langle g, f_n\rangle = \int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow 1.$$

5) Se fosse $f_n \rightharpoonup f$ debole, allora posso moltiplicare per $g = \chi_{(a,b)}$ $a>0$.

$$\langle g, f_n\rangle = \int_a^b n e^{-nx}\,dx = e^{-na} - e^{-nb} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$f_n \longrightarrow 0$ q.o. in $L^1(0,1)$

$f_n(x) \geq 0$ per q.o. x

allora converge debole $\Longleftrightarrow$ conv. forte.

$$f_n(x) = n^{1/p} e^{-nx} \qquad 1 < p < \infty$$

1) $f_n \to 0$ q.o. ovvio

2) f_n limitato in $L^p(0,1)$

3) $f_n \not\to 0$ $L^p(0,1)$ forte

4) $f_n \rightharpoonup 0$ $L^p(0,1)$ debole.

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^1 n\, e^{-npx}\, dx = -\frac{1}{p} e^{-nx}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - e^{-n}\right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\xrightarrow{n} \frac{1}{p}$$

4) $g \in L^\infty \Rightarrow$ Hölder ok

altrimenti approssima

Metodo alternativo:

Vedremo che: da ogni succ^{ne} limitata in L^p $(1<p<\infty)$ si può estrarre una sottosucc^{ne} che conv. debolmente in L^p.

$f_n \longrightarrow 0$ q.o.

$\Longrightarrow$ il limite debole di questa sottosucc^{ne} è 0.

In un qualsiasi sp. topologico

$x_n \longrightarrow x \iff \forall$ sottosucc^{ne} $\{x_{n_k}\}$ esiste una sottosottosucc^{ne} $\{x_{n_{k_\ell}}\}$ t.c.

$$x_{n_{k_\ell}} \longrightarrow x$$