

Esercizio Sia $f_n(x) = n e^{-nx}$.

Provare che:

- 1) $f_n(x) \rightarrow 0$ q.o. in $(0,1)$
- 2) $\{f_n\}$ è limitata in $L^1(0,1)$
- 3) $f_n \not\rightarrow 0$ in $L^1(0,1)$
- 4) $f_n \not\rightarrow 0$ in $L^1(0,1)$
- 5) f_n non ammette limite debole in $L^1(0,1)$

1) è ovvio.

$$2) \|f_n\|_1 = n \int_0^1 e^{-nx} dx = -e^{-nx} \Big|_0^1 = 1 - e^{-n} \leq 1$$

$$3) \|f_n\|_1 = 1 - e^{-n} \xrightarrow{n} 1, \text{ non tende a zero.}$$

4) Basta fare il pairing con $g(x) \equiv 1 \in L^\infty(0,1)$.

$$\text{Si ha } \langle g, f_n \rangle = \|f_n\|_1 \rightarrow 1$$

mentre, se fosse $f_n \rightarrow 0$ dovrebbe essere

$$\langle g, f_n \rangle \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^\infty(0,1)$$

5) Varie possibilità:

a) Osserviamo che f_n tende a zero uniformemente in ogni intervallo del tipo $[\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$.

Ne segue che $f_n \rightarrow 0$ in $L^p(\varepsilon, 1) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall p \in [1, \infty]$

Poiché la convergenza debole in $L^1(0,1)$ a un limite f implica la convergenza debole a f in $L^1(E)$

$\forall E$ s.i. misurabile di $(0,1)$ (perché?)

ne segue che $f|_{[\varepsilon, 1]} = 0 \quad \forall \varepsilon$

Quindi $f = 0$ q.o. in $(0,1)$.

Ma abbiamo già verificato che $f_n \not\rightarrow 0$ in $L^1(0,1)$ debole.

b) Si può dimostrare che, in un generico spazio di misura σ -finita,

$$\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f \text{ in } L^1(\Omega) \text{ debole} \\ f_n \rightarrow h \text{ q.o.} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} h = f, \text{ e} \\ f_n \rightarrow f \text{ forte} \end{array}$$

Infatti, se $f_n \rightarrow f$ debole in L^1 , si ha:

- $\{f_n\}$ è equi-integrabile, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } E \subset X \text{ misurabile, e } |E| < \delta, \\ \text{allora} \quad \int_E |f_n| d\mu < \varepsilon. \quad \forall n$$

- $\{f_n\}$ è "tattenuta", cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ un insieme di misura finita $F \subset X$ t.c.

$$\int_{F^c} |f_n| d\mu < \varepsilon. \quad \forall n$$

[Questo è una conseguenza del teorema di Dunford-Pettis, che faremo a lezione].

Se aggiungiamo l'ipotesi che $f_n \rightarrow h$ q.o. oppure in misura, per il teorema di Vitali si avrebbe

$$f_n \rightarrow h \text{ forte in } L^1(X).$$

Nel nostro caso, se supponiamo che f_n converga a f in $L^1(0,1)$ deb., segue dal pto 1) che $f_n \rightarrow 0$ in $L^1(0,1)$ forte, che è falso.

