

Prodotto di topologie deboli,

Siano X, Y spazi di Banach. Dotiamo entrambi delle topologie deboli $\sigma(X, X^*)$ e $\sigma(Y, Y^*)$.

Consideriamo poi lo spazio prodotto $X \times Y$ dotato della topologia prodotto delle topologie deboli, $\sigma(X, X^*) \times \sigma(Y, Y^*)$.

D'altra parte $X \times Y$ è uno sp. di Banach con la norma

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Quindi posso considerare la topologia debole su questo spazio

$$\sigma(X \times Y, (X \times Y)^*)$$

Vogliamo provare che le due topologie coincidono

$$(\sigma(X, X^*) \times \sigma(Y, Y^*)) = \sigma(X \times Y, (X \times Y)^*)$$

Questo è un risultato che serve per provare che una funzione $T: X \rightarrow Y$ debolmente continua è anche fortemente continua ($\rightarrow$ [Brezis])

In generale, dati due spazi topologici (X, σ) e (Y, τ) , la topologia prodotto è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni

$$P_X: X \times Y \longrightarrow (X, \sigma)$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

$$P_Y: X \times Y \longrightarrow (Y, \tau)$$
$$(x, y) \longmapsto y.$$

Se B_X è una base di intorni di (X, σ)

e B_Y " " " " " " (Y, τ) ,

allora una base di intorni per la topologia prodotto
è data dai prodotti del tipo $U \times V$
dove $U \in B_X$, $V \in B_Y$.

Tenuto conto di come sono le basi di intorni delle topologie
deboli, una base di intorni di $\sigma(X, X^*) \times \sigma(Y, Y^*)$ è
data da insiemi della forma

$$W = \{ (x, y) : \begin{array}{l} |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \quad i = 1 \dots M \\ |\langle g_j, y - y_0 \rangle| < \varepsilon \quad j = 1 \dots N \end{array} \} \quad (1)$$

al variare di $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $M, N \in \mathbb{N}$,

$f_i \in X^*$ ($i = 1 \dots M$), $g_j \in Y^*$ ($j = 1 \dots N$), $\varepsilon > 0$

Invece una base di intorni di $\sigma(X \times Y, (X \times Y)^*)$
è data da insiemi del tipo:

$$Z = \{ (x, y) : |\langle F_i, (x, y) - (x_0, y_0) \rangle| < \varepsilon \quad i = 1 \dots N \} \quad (2)$$

al variare di $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$,

$F_i \in (X \times Y)^*$.

LEMMA I funzionali di $(X \times Y)^*$ sono tutti e soli i funzionali del tipo

$$F(x, y) = f(x) + g(y) \quad (3)$$

con $f \in X^*$, $g \in Y^*$.

DIM Chiaramente ogni funzionale del tipo (3) appartiene a $(X \times Y)^*$.

Viceversa, sia $F \in (X \times Y)^*$. Quindi $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, e inoltre

$$|F(x, y)| \leq c(\|x\| + \|y\|) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pongo } f(x) = F(x, 0). \text{ Ovviamente } f \in X^* \\ g(y) = F(0, y). \quad \quad \quad " \quad \quad \quad g \in Y^* \end{array} \right\} (4)$$

$$\text{e } F(x, y) = f(x) + g(y) \quad \square$$

Dobbiamo provare che ogni intorno W del tipo (1) contiene un intorno Z del tipo (2), e viceversa.

Dato l'intorno W indicato da (1), ponendo

$$F_i(x, y) = f_i(x) \in (X \times Y)^*, \quad G_j(x, y) = g_j(y) \in (X \times Y)^*,$$

$$W = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} |\langle F_i, (x, y) - (x_0, y_0) \rangle| < \varepsilon, \quad i = 1 \dots M \\ |\langle G_j, (x, y) - (x_0, y_0) \rangle| < \varepsilon \quad j = 1 \dots N \end{array} \right\}$$

che è del tipo (2).

Viceversa, dato l'intorno Z definito da (2),

definisco $f_i(x) = F_i(x, y) \in X^*$, $g_i(y) = F_i(x, y) \in Y^*$,

e considero

$$W = \left\{ (x, y) : \left| \langle f_i, x - x_0 \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \langle g_i, y - y_0 \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

($i = 1, \dots, N$)

questo è del tipo (1), ed è contenuto in Z .