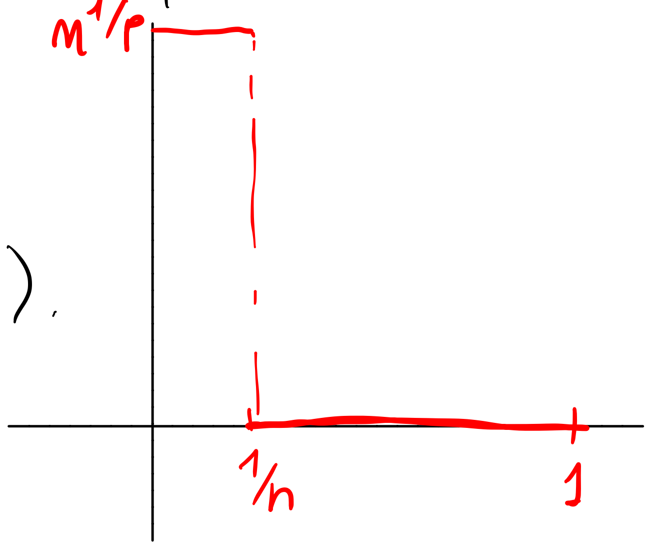
Esempi di convergenza debole negli spazi $L^p(\Omega)$

(Ω aperto di $\mathbb{R}^N$)

Consideriamo $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

$$f_n(x) = n^{1/p} \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$$



Allora $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(0,1)$, ma non fortemente.

$f_n \not\to 0$ in $L^p(0,1)$ ovvio

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^1 |f_n(x)|^p dx = \int_0^{1/n} n^{1/p \cdot p} dx = 1$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_p = 1 \not\to 0.$$

Proviamo che $f_n \rightharpoonup 0$ debole L^p.

Sia $g \in L^{p'}(0,1)$. Dobbiamo provare che $\quad p' = \dfrac{p}{p-1}$

$$\int_0^1 g f_n \, dx \xrightarrow{n} 0$$

Se $g \in L^\infty(0,1)$, è ovvio.

$$\left| \int_0^1 g f_n \, dx \right| = \left| n^{1/p} \int_0^{1/n} g(x) dx \right| \leq n^{1/p} \frac{1}{n} \|g\|_\infty =$$

$$= n^{\frac{1}{p}-1} \|g\|_\infty \longrightarrow 0$$

Caso generale: se $g \in L^{p'}$ approssimiamo con $\tilde{g} \in L^\infty$.

$L^\infty(0,1)$ denso in $L^{p'}(0,1)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \tilde{g} \in L^\infty(0,1)$ t.c. $\|g - \tilde{g}\|_{p'} < \varepsilon$.

$$|\langle g, f_n \rangle| \le \underbrace{|\langle g - \tilde{g}, f_n \rangle|}_{\le \text{ Hölder } \underbrace{\|g-\tilde{g}\|_{p'}}_{< \varepsilon} \underbrace{\|f_n\|_p}_{= 1}} + \underbrace{|\langle \tilde{g}, f_n \rangle|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \limsup_n |\langle g, f_n \rangle| \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \lim_n \langle g, f_n \rangle = 0 \quad \forall g \in L^{p'} = (L^p)^*$$

$\Rightarrow$ conv. debole.

"Concentrazione".

OSS se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un insieme di misura finita

e se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ allora

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad \forall q \text{ t.c. } 1 \leq q < p$$

Questo perché, se $q < p \Rightarrow L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$

$$\Downarrow$$

$$q' > p' \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \supset L^{q'}(\Omega)$$

Quindi per ottenere la conv. debole in L^q devo "testare" meno f. test.

Altra oss.

$$\left.\begin{array}{l} f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\Omega) \\ f_n \to h \text{ q.o. in } \Omega \\ \quad\quad \text{opp. in misura.} \end{array}\right| \Rightarrow f = h$$

cioè

$f_n \to f$ in misura $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda > 0$

$$\text{mis}\{x : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\} \xrightarrow{n} 0$$

Infatti

$f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ $\Longrightarrow$ $\|f_n\|_p \leq c$ $f \in L^p$

$f_n \to h$ q.o. o in misura $\Longrightarrow$ $h \in L^p(\Omega)$ per Fatou

Sia ora $1 \leq q < p$. Allora si dimostra che

$$f_n \to h \quad L^q(\Omega) \quad \underline{\text{forte}}.$$

Si usa il teor. di conv. di Vitali

$$\int_E |f_n|^q \, dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left[\int_E |f_n|^p dx\right]^{q/p}}_{\leq \left(\int_\Omega |f_n|^p\right)^{q/p} \leq c} \underbrace{|E|^{1-\frac{q}{p}}}_{\substack{\text{piccola} \\ \text{se } |E| \text{ piccola}}}$$

Quindi (Vitali) $\qquad f_n \to h$ in $L^q(\Omega)$

$|\Omega| < \infty \qquad 1 \le q < p$

$$\underbrace{\begin{matrix} f_n \to f \quad L^p \\ f_n \to h \quad \text{in misura} \end{matrix}}_{} \implies f_n \to f \quad L^q$$

$$\Downarrow$$

$$f_n \to h \quad L^q \implies f_n \to h \quad L^q$$

$$\implies h = f$$

TEOREMA DI CONV. DI VITALI

Sia (X,μ) generico spazio di misura positiva.

Siano $f_n \in L^p(X,\mu)$ $\quad 1 \le p < \infty$.

Allora

$f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ $\iff$

1) $f_n \to f$ in misura

2) $|f_n|^p$ è equi-integrabile

(ossia: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall E \subset X$ misurabile con $\mu(E) < \delta$ si ha
$$\int_E |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon \qquad \forall n \text{).}$$

3) $|f_n|^p$ è "tight" (o trattenuta), cioè "la massa non fugge all'infinito", cioè: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset X$ di misura finita t.c.
$$\int_{F^c} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon . \quad \forall n$$

<u>OSS</u> se X è di misura finita, allora 3) è sempre verificata

<u>OSS</u> E' una generalizz. del thm. di conv. dominata

$\Rightarrow$ se $|f_n(x)|^p \le g(x)$ sommabile, allora 2) e 3) sono verificate

DIM $\boxed{\Leftarrow}$

In primo luogo, per Fatou $f \in L^p(X,\mu)$

Fissato $\varepsilon>0$, $\exists F$ di misura finita t.c.

$$\int_{F^c} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon. \qquad \forall n.$$

Inoltre $\exists \delta>0$ t.c. $\forall E$ verificante $\mu(E)<\delta$ si ha

$$\int_E |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Thm. Egorov $\Rightarrow$ $\exists$ un insieme $E \subset F$ t.c. $\mu(E)<\delta$
t.c. $f_n \to f$ unif^{te} in $F \setminus E$

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu = \underbrace{\int_{F\setminus E} |f_n - f|^p d\mu}_{\xrightarrow{\text{c.u.}} 0} + \underbrace{\int_E |f_n - f|^p d\mu}_{\leq 2^{p-1}\left(\int_E |f_n|^p + \int_E |f|^p\right) \leq 2^p\varepsilon} + \underbrace{\int_{F^c} |f_n - f|^p d\mu}_{\leq 2^p\varepsilon}$$

Quindi $f_n \to f \quad L^p$

e questo prova $\boxed{\Leftarrow}$ $\square$

$$\left[(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall a,b \geq 0\right]$$

Altri esempi di funzioni deb. convergenti in $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$.

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x) \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(\mathbb{R})$$

$$f_n(x) = n^{-1/p} \chi_{(0,n)}(x) \rightharpoonup 0 \quad \text{"}$$

(Dettagli per esercizio).

Esempio importante di succ^{ne} deb. convergente in $L^p(0,1)$ $\quad 1 < p < \infty$

"omogeneizzazione periodica".

Sia $u(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 1

t.c. $u \in L^p(0,1)$

per semplificare (va bene qualsiasi periodo T)

$$u_n(x) = u(nx)$$

Allora $\quad u_n(x) \rightharpoonup \bar{u} = \int_0^1 u(x)\,dx \quad L^p(0,1)$

(in generale $\quad \bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(x)\,dx$)

Quindi $\quad \operatorname{sen}(nx) \rightharpoonup 0 \quad$ in $L^p(0,1)$ $\forall p \in (1,\infty)$

OSS In questo esempio non si ha $u_n \to \bar{u}$ in misura o q.o.

DIM. Dobbiamo provare che, $\forall g \in L^{p'}(0,1)$, si ha

$$\langle g, u_n \rangle = \int_0^1 g(x)\, u(nx)\, dx \xrightarrow[n]{} \bar{u} \int_0^1 g(x)\, dx.$$

1) Cominciamo a provarlo per $g = \chi_{(0,a)}(x)$ $\forall a \in (0,1]$

$$\langle g, u_n \rangle = \int_0^a u(nx)\, dx = \frac{1}{n} \int_0^{na} u(t)\, dt =$$

$nx = t$

$dx = \frac{dt}{n}$

parte intera

$$= \underbrace{\frac{1}{n} \int_0^{\lfloor na \rfloor} u(t)\, dt}_{= a \frac{\lfloor na \rfloor}{na} \bar{u}} + \underbrace{\frac{1}{n} \int_{\lfloor na \rfloor}^{na} u(t)\, dt}_{= \frac{1}{n} \int_0^{na - \lfloor na \rfloor} u(t)\, dt} \to a\bar{u} = \langle g, \bar{u} \rangle$$

$\frac{\lfloor na \rfloor}{na} \to 1$, $\quad a \frac{\lfloor na \rfloor}{na} \bar{u} \to a\bar{u}$

$\int_0^{na - \lfloor na \rfloor} u(t)\, dt$ limitata, $\quad \frac{1}{n} \int_0^{na - \lfloor na \rfloor} u(t)\, dt \to 0$

$$\frac{na - 1}{na} \leq \frac{\lfloor na \rfloor}{na} \leq \frac{na}{na}$$

2) Sia $g = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \, \chi_{[a_k, b_k)}$, essa è

comb. lineare di funzioni del tipo

$\chi_{(0,a)}(x)$, e quindi

$$\langle g, u_n \rangle \longrightarrow \langle g, \bar{u} \rangle$$

3) Sfruttiamo la densità in $L^{p'}(0,1)$ delle funzioni del tipo descritto al punto 2)

Fissata $g \in L^{p'}$, trovo $\tilde{g}$ funz. costante a tratti t.c. $\|g - \tilde{g}\|_{L^{p'}(0,1)} < \varepsilon$

$$|\langle g, u_n \rangle - \langle g, \bar{u} \rangle| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\langle g - \tilde{g}, u_n \rangle|}_{\leq \underbrace{\|g-\tilde{g}\|_{p'} \|u_n\|_p}_{\leq C\varepsilon}} + \underbrace{|\langle \tilde{g}, u_n \rangle - \langle \tilde{g}, \bar{u} \rangle|}_{\downarrow 0 \text{ per 2)}} + \underbrace{|\langle \tilde{g} - g, \bar{u} \rangle|}_{\leq \|\tilde{g}-g\|_{p'} \|\bar{u}\|_p \leq C\varepsilon}$$

OSS $\|u_n\|_p \leq C$

$$\int_0^1 |u_n|^p \, dx = \int_0^1 |u(nx)|^p \, dx = \frac{1}{n} \int_0^n |u(t)|^p \, dt = \|u\|^p_{L^p(0,1)}$$

Conv. debole in $L^1(0,1)$

$$u_n(x) = n\,\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} \not\rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^1(0,1)$$

Se prendo $g \in L^\infty(0,1)$ t.c. $g \equiv 0$ in un intorno destro di $x=0$

$\langle g, u_n \rangle = 0$ $\quad$ def^{te}

Se fosse $u_n \rightharpoonup u$ debole L^1

dovrebbe essere $\langle g, u \rangle = 0 \;\; \forall g$ così fatta.

$\Rightarrow u = 0$ q.o. in $(0,1)$.

Ma se prendo $g \equiv 1$

$$\langle g, u_n \rangle = \int_0^1 u_n = 1$$

$$\big\downarrow$$

$$\langle g, u \rangle = 0$$

Sia $u(x) \in L^1(0,1)$ prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$.

Posto $u_n(x) = u(nx)$ $\qquad \bar{u} = \int_0^1 u(x)\,dx$

si ha sempre $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ debole $L^1(0,1)$?

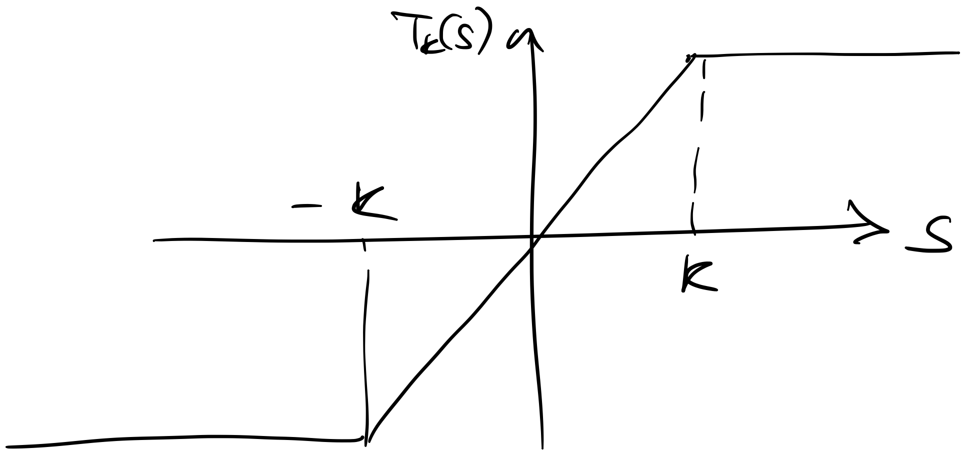
<u>oss</u> se $u(x) \in L^q(0,1)$ per qualche $q>1$, ok

perché $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ in L^q debole

$$\Rightarrow u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } L^1 \text{ debole}$$

Allora pongo

$T_k(s) =$



Prendiamo $T_k(u_n(x)) = (T_k(u))_n \in L^\infty(0,1)$

Abbiamo visto che

$$(T_k u)_n \rightharpoonup \overline{(T_k u)} \quad L^p \ \forall p < \infty$$

Allora se $g \in L^\infty(0,1)$

$$|\langle g, u_n\rangle - \langle g, \bar{u}\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle g, u_n - T_k(u_n)\rangle| + \overbrace{|\langle g, T_k(u_n) - \overline{(T_k(u))}\rangle|}^{\to 0} +$$

$$+ |\langle g, \overline{(T_k(u))} - \bar{u}\rangle|$$

piccola se k grande (da vedere)