DEF $\{x_n\} \subset X \qquad x \in X$

Se x_n tende a x nella topologia debole, diremo che x_n tende (o converge) debolmente a x, e indicheremo ciò con $x_n \rightharpoonup x$

Invece se x_n tende a x nella topologia della norma, diremo che x_n tende fortemente a x, e scriveremo $\qquad x_n \to x.$

Ovviamente

$$x_n \to x \quad \Longrightarrow \quad x_n \rightharpoonup x.$$

La convergenza forte implica quella debole.

Proprietà della conv. debole

TEOREMA X sp. Banach

1) $x_n \rightharpoonup x \iff \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \ \forall f \in X^*$

2) Se $x_n \rightharpoonup x$, allora le x_n sono limitate

e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\| < \infty$

(semicont. della norma).

3) se $x_n \rightharpoonup x$, $f_n \longrightarrow f$ in X^*, allora

$\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$

DIM.

La 1) segue dalla prop. vista la volta scorsa, oppure dalla def.^{ne} della base di intorni.

Dim 2) E' una conseguenza di Banach-Steinhaus.

$\forall f \in X^*$ $\{f(x_n)\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ x_n limitato in X

cioè $\|x_n\| \leq C$.

$$|f(x)| = \lim_n \underbrace{|f(x_n)|}_{\leq \|f\|_{X^*} \|x_n\|} \leq \|f\|_{X^*} \liminf_n \|x_n\|$$

$$|f(x)| = \lim_n \underbrace{|f(x_n)|}_{\substack{\wedge|| \\ \|f\|_{X^*} \|x_n\|}} \leq \|f\|_{X^*} \liminf_n \|x_n\|$$

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leq 1}} |f(x)| \leq \underbrace{\sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|\leq 1}} \|f\|}_{= 1} \liminf_n \|x_n\|$$

$$= \liminf_n \|x_n\|$$

Dim 3)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\substack{\wedge|| \\ \underbrace{\|f_n - f\|_{X^*}}_{\downarrow 0} \underbrace{\|x_n\|_X}_{\substack{\wedge|| \\ c}}}} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

per conv. deb. $x_n \rightharpoonup x$

$$\xrightarrow{n} 0$$

CONFRONTO TRA TOPOLOGIA DEBOLE E TOPOLOGIA FORTE

PROP

1) Se X ha dim. finita, allora la topologia debole e quella forte coincidono

2) Se X ha dim. infinita, allora la topologia debole contiene meno aperti di quella forte, (cioè è davvero più debole).

DIM. 1) X di dim. finita.
Mostriamo che un aperto forte è anche aperto debole

Sia $\underline{x}_0 \in A \leftarrow$ aperto forte $\subset X$.

Voglio trovare un intorno debole di x_0 contenuto in A.

Sia $\underline{e}_i$, $i = 1 \dots N$, una base di X t.c. $\|e_i\| = 1$

Allora ogni $x \in X$ si scrive in modo unico come $\underline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \underline{e}_i$. Poniamo anche

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^{N} a_i \underline{e}_i$$

Osserviamo che $f_i : \underline{x} \longrightarrow x_i$ è lineare e continua.

A aperto forte, $x_0 \in A \Rightarrow \exists\ B(x_0, \varepsilon) \subset A$.

$$\| \underline{x} - \underline{x}_0 \| \underset{\text{dis. triangolare}}{\leq} \sum_{i=1}^{N} |x_i - a_i| \underbrace{\| \underline{e}_i \|}_{=1} = \sum_{i=1}^{N} |x_i - a_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |f_i(x - x_0)|$$

Prendo l'intorno debole di x_0

$$V = \left\{ x \in X : \ |f_i(x - x_0)| < \frac{\varepsilon}{N} \right\}$$

e per il calcolo precedente

$$x_0 \in V \subset B(x_0, \varepsilon) \subset A$$

$\square$

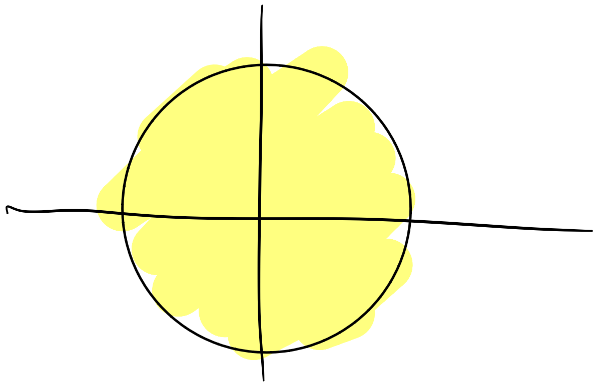
Dim 2) Sia X uno sp. di Banach di dim. infinita. Mostrerò che

$$S = \{ x \in X : \|x\| = 1 \}$$ (sfera unitaria)

che è chiuso forte, non è chiuso debole, anzi si ha

$$\overline{S}^{\sigma(X,X^*)} = B = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$$

chiusura di S nella top. debole



Verifichiamolo. Sia $x_0 \in X$ t.c. $\|x\| < 1$.

Mostriamo che ogni intorno debole di x_0 contiene una <u>retta</u> passante per x_0

E' chiaro che tale retta interseca S, e quindi ogni intorno debole U di x contiene almeno un punto di S.

Possiamo supporre che U sia della forma

$$U = \{ x \in X ; |(f_i, x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall i = 1 \dots N \} \qquad f_i \in X^* \text{ \underline{fissati}}$$

$\exists\, y_0 \neq 0$ t.c. $f_i(y_0) = 0 \quad \forall i = 1 \dots N$

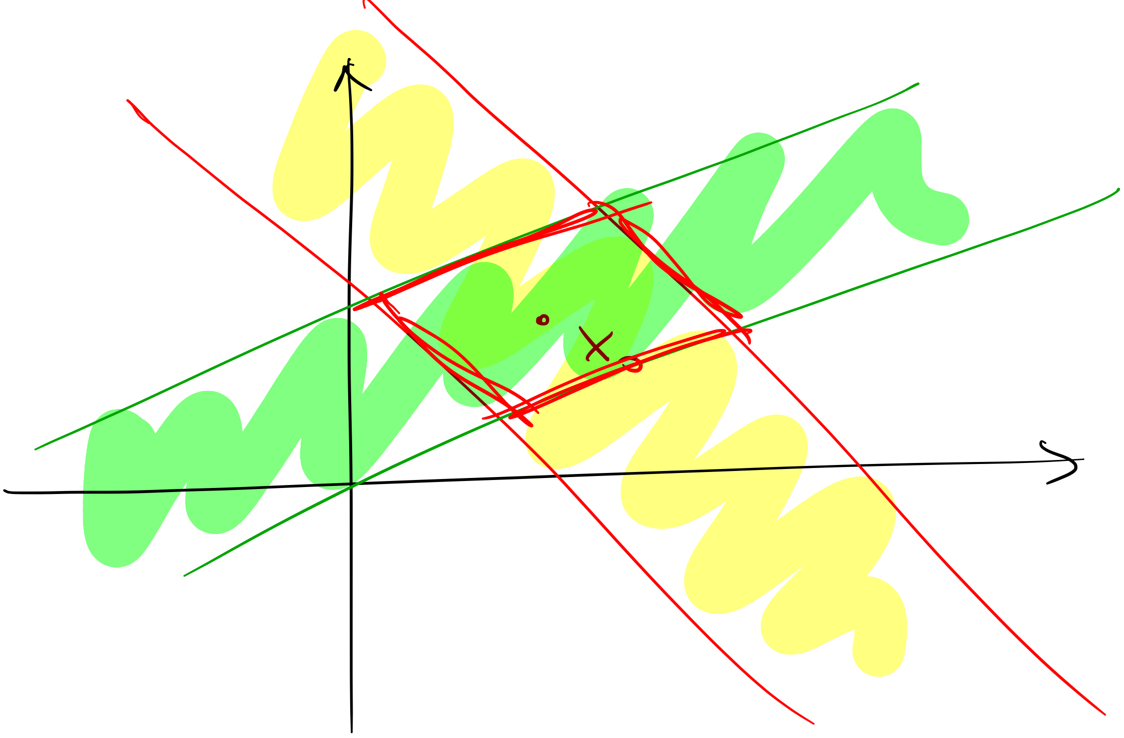
(se così non fosse, la mappa

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \dots f_N(x)) \qquad \text{lineare e continua}$$

sarebbe iniettiva e quindi sarebbe un isomorfismo tra X e $\mathbb{R}^N$ (impossibile perché X ha dim. infinita))

Se consideriamo la retta $x_0 + t y_0$, essa è tutta contenuta in U.

Perché $f_i(x_0 + t y_0) = f_i(x_0)$.



Abbiamo provato che
la chiusura di S nella topologia debole contiene B.

Mostriamo che B è chiuso debolmente.

Infatti

$$x \in B \iff \|x\| \leq 1 \iff |f(x)| \leq 1 \quad \forall f \in X^* \text{ t.c. } \|f\|_{X^*} \leq 1$$

$$B = \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \underbrace{\{x \text{ t.c. } |f(x)| \leq 1\}}_{\text{chiuso debole}}$$

chiuso debole (interss. di chiusi deb)

OSS1 In realtà abbiamo provato che in dim infinita ogni aperto debole contiene una retta, quindi è illimitato

OSS 2 Il fatto che B è chiuso si generalizza

tutti i convessi fortemente chiusi sono anche debolmente chiusi.

TEOREMA $C \subset X$ convesso. Allora

C fortemente chiuso $\iff$ C debolmente chiuso

DIM. Basta provare $\boxed{\Longrightarrow}$

Sia C convesso chiuso forte. Mostriamo che il suo complementare è debolmente

Sia $x_0 \notin C$. Uso Hahn-Banach (geometrico) con C e $\{x_0\}$

convesso chiuso   convesso compatto

$\Rightarrow \exists$ iperpiano chiuso $[f = \alpha]$ che separa strettamente i due insiemi $(f \in X^*)$

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in C$$

L'insieme $U = \{x : f(x) > \alpha\}$ è un aperto debole contenente x_0 e disgiunto da C.

$\square$

Esempi di succ^{ni} debolmente convergenti (ma non fortemente).

1) ℓ^p $\quad 1 < p < \infty \quad$ $\ell^p = \{ \underline{x} = \{x_i\} \text{ t.c. } \sum_i |x_i|^p < \infty$

$$(\ell^p)^* = \ell^{p'} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Cioè $\forall f \in (\ell^p)^*$ $\exists!$ $\underline{y} \in \ell^{p'}$ t.c.

$$\langle f, \underline{x} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i y_i$$

$$\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \qquad \underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Considero la succ^{ne} $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\underline{e}^{(n)} = (0, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, 0, \dots).$$

OSS $\quad \underline{e}^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad$ in ℓ^p

ma $\quad \underline{e}^{(n)} \not\to 0 \quad$ in ℓ^p forte

perché $\|\underline{e}^{(n)}\|_{\ell^p} = 1 \quad \forall n$

Infatti se $f \in (\ell^p)^*$

$$\langle f, \underline{e}^{(n)} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i e_i^{(n)} = y_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

OSS Se $\underline{x}^{(n)} \rightharpoonup 0$ in ℓ^p

$\Rightarrow$ (prendendo $\underline{y} = \underline{e}^{(i)}$) $x_i^{(n)} \xrightarrow{n} 0$

(conv. puntuale)

$1 \leq p \leq \infty$

2) ℓ^∞, il duale è complicato.

$\underline{e}^{(n)} \rightharpoonup \underline{0}$?

Il limite debole, se esiste, è $\underline{0}$ (per l'oss. preced.)

Supponiamo per assurdo che $\underline{e}^{(n)} \not\rightharpoonup \underline{0}$

$\Rightarrow \exists f \in (\ell^\infty)^*$ t.c.

$\langle f, \underline{e}^{(n)} \rangle \not\to 0$

Posso allora estrarre una sottosucc^{ne} t.c.

$$|f(\underline{e}^{(n_k)})| \geq \varepsilon > 0$$

Definiamo $\lambda_k = \text{sign}(f(e^{(n_k)}))$

e pongo $\underline{x}_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \, \underline{e}^{(n_k)}$

$$\|\underline{x}_N\|_\infty = 1$$

$$f(\underline{x}_N) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \, f(\underline{e}^{(n_k)}) = \sum_{k=1}^{N} \overbrace{|f(e^{(n_k)})|}^{\geq \varepsilon} \geq$$

$\geq N\varepsilon$ poiché N è arbitrario, f non può essere continua.

Stesso esempio in ℓ^1

$$\underline{e}^{(n)} \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } \ell^1 ?$$

NO perché vale il

TEOREMA di SCHUR

In ℓ^1 si ha

$$\underline{x}^{(n)} \rightharpoonup \underline{x} \iff \underline{x}^{(n)} \longrightarrow \underline{x}$$

OSS Questo non contrasta con il fatto che la topologia debole da quella forte, perché la topologia debole non è metrizzabile (non proviene da una metrica).

DIM. Dobbiamo solo provare $\boxed{\Longrightarrow}$

Sia $\underline{x}^{(n)} \rightharpoonup \underline{x}$. Sottraendo $\underline{x}$ posso supporre che $\underline{x}^{(n)} \rightharpoonup \underline{0}$

OSS sappiamo $x_i^{(n)} \xrightarrow{n} 0$

Supponiamo per assurdo che $\underline{x}^{(n)} \not\longrightarrow \underline{0}$, quindi estraendo una sottosucc^{ne} posso supporre $\|\underline{x}^{(n)}\|_1 \geq \varepsilon > 0$

$n=1$ $\qquad x^{(1)} \in \ell^1$

$$\Rightarrow \exists\ M_1 \text{ t.c. } \sum_{i>M_1} |x_i^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Ne segue che

$$\sum_{i\leq M_1} |x_i^{(1)}| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{4}{5}\varepsilon$$

Fissiamo $M_0=0$, $n_1 = 1$ $\qquad M_1$ questo

Poiché le singole componenti vanno a zero, posso trovare $n_2 > n_1$ t.c.

$$\sum_{i\leq M_1} |x_i^{(n_2)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Per tale n_2, posso trovare $M_2 > M_1$ t.c.

$$\sum_{i>M_2} |x_i^{(n_2)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\Rightarrow \sum_{M_1<i\leq M_2} |x_i^{(n_2)}| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}$$

Trovo $n_3 > n_2$ t.c.

$$\sum_{i\leq M_2} |x_i^{(n_3)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$ e poi fisso

e poi fisso $M_3 > M_2$ t.c

$$\sum_{i > M_3} |x_i^{(n_3)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\sum_{M_2 < i \leq M_3} |x_i^{(n_3)}| \geq \frac{3\varepsilon}{5}$$

In questo modo trovo due succ^{ni} crescenti di interi, n_k e M_k t.c.

$$\sum_{i \leq M_{k-1}} |x_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\sum_{i > M_k} |x_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\sum_{M_{k-1} < i \leq M_k} |x_i^{(n_k)}| > \frac{3\varepsilon}{5}$$

Definisco la seguente succ^{ne} $\underline{y} = \{y_i\} \in \ell^\infty$

$$y_i = \operatorname{sign}(x_i^{(n_k)}) \qquad \text{se } M_{k-1} < i \leq M_k$$

Per def di conv. debole

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \underline{x}_i^{(n)} \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\langle y, \underline{x}^{(n_k)} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \, x_i^{(n_k)} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i \leq M_{k-1}} y_i \, x_i^{(n_k)}}_{\geq -\sum_{i \leq M_{k-1}} |x_i^{(n_k)}| \,\geq\, -\frac{\varepsilon}{5}} + \underbrace{\sum_{M_{k-1} < i \leq M_k} y_i \, x_i^{(n_k)}}_{= \sum_{M_{k-1} < i \leq M_k} |x_i^{(n_k)}| \,\geq\, \frac{3\varepsilon}{5}} + \underbrace{\sum_{i > M_k}}_{\geq -\frac{\varepsilon}{5}} \geq$$

$$\geq -\frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{5} > 0 \qquad \square$$