TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO

X, Y sp. di Banach

$T : X \to Y$ lineare

Se il grafico

$$G(T) = \{(x,y) \in X \times Y : \quad y = T(x)\}$$

è chiuso in $X \times Y$.

(cioè se $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \text{ in } X \\ Tx_n \to y \text{ in } Y \end{array}\right] \Rightarrow y = Tx$)

allora T è continua.

DIM Sia X dotato delle due norme

$\|\cdot\|_X$, e $|||x||| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$

$(X, \|\cdot\|)$ è di Banach per ipotesi.

$(X, |||\cdot|||)$ è di Banach per l'ipotesi di grafico chiuso.

Sia $\{x_n\} \subset X$ di Cauchy nella norma $|||\cdot|||$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $\forall n,m > N \quad \underbrace{|||x_n - x_m|||}_{\|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \{x_n\} \text{ è di Cauchy in } X \\ \{Tx_n\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{in } Y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_n \to x \quad \text{in } X \\ Tx_n \to y \text{ in } Y \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ per l'ipotesi di grafico chiuso $\quad y = Tx$

$\Rightarrow \; |||x_n - x||| \longrightarrow 0$

Quindi anche $(X, |||\cdot|||)$ è completo.

Inoltre $\qquad \|x\| \leq |||x||| \qquad \forall x \in X$.

$\Rightarrow$ [Corollario] $\quad \exists\, c_2$ t.c.

$$\underbrace{|||x|||}_{\|x\|_X + \|Tx\|_Y} \leq c_2 \, \|x\|_X$$

$\Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq (c_2 - 1)\, \|x\|_X \;\Rightarrow T$ continuo.

Esempio di operatore lineare a grafico chiuso ma non continuo:

$X = C^1([0,1])$ ma con la norma di C^0

$$\|u\|_X = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$$

$Y = C^0([0,1])$ con la stessa norma.

$T : X \to Y$ lineare.

$u \longmapsto u'$

E' a grafico chiuso..

$$\left.\begin{array}{ll} u_n \to u \quad \text{in } X & (\text{cioè unif}^{te}) \\ T(u_n) = u_n' \to v \quad \text{in } Y & (\text{"} \quad \text{"}) \end{array}\right\} \Rightarrow v = Tu = u'$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt$$

$$\downarrow n \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$u(x) \qquad u(0) \qquad \int_0^x v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)\,dt \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow v(x) = u'(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad v = T(u)$$

Ma T non è continua.

$$u_n(x) = x^n$$

$$\|u_n\|_X = \max_{x\in[0,1]} x^n = 1.$$

$$\|Tu_n\|_Y = \max_{x\in[0,1]} n x^{n-1} = n$$

Non si ha una dis. del tipo

$$\underbrace{\|Tu_n\|}_{= n} \leq c \underbrace{\|u_n\|}_{= 1}$$

OSS Questo non contraddice il teorema perché X non è completo.

$$u_n = \frac{\sin(nx)}{n} \to 0 \quad \text{in } X$$

$$Tu_n = \cos(nx) \quad \text{non converge in } Y.$$

ESERCIZIO

X sp. di Banach

$T: X \to X^*$ lineare e <u>positivo</u>, cioè

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in X.$$

$$\overset{\shortparallel}{(Tx)(x)}$$

Allora T è continuo.

(Usare il grafico chiuso).

Supponiamo $x_n \to x$ in X, $Tx_n \to f$ in X^* $\;\Big|\; \overset{\text{Tesi}}{\Longrightarrow} f = Tx$

$$0 \leq \langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle =$$

$$= \underset{\downarrow \atop \langle f, x\rangle}{\langle Tx_n, x_n\rangle} - \underset{\downarrow \atop \langle f, y\rangle}{\langle Tx_n, y\rangle} - \underset{\downarrow \atop \langle Ty, x\rangle}{\langle Ty, x_n\rangle} + \langle Ty, y\rangle$$

$$\left(\big|\langle Tx_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle\big| \leq \underset{\underset{\|Tx_n - f\|_{X^*} \underbrace{\|x_n\|}_{\leq C}}{\wedge\!\shortparallel}}{\big|\langle Tx_n - f, x_n\rangle\big|} + \underbrace{\big|\langle f, x_n - x\rangle\big|}_{\downarrow \atop 0} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle f, y-x\rangle \le \langle Ty, y-x\rangle \qquad \forall y\in X,$$

$$y-x=z$$

$$\langle f, z\rangle \le \langle T(x+z), z\rangle \qquad \forall z\in X.$$

sost. $z \longrightarrow az \qquad a>0$

$$\cancel{a}\langle f, z\rangle \le \cancel{a}\langle Tx, z\rangle + a^{\cancel{2}}\langle Tz, z\rangle$$

$a \to 0^+$

$$\langle f, z\rangle \le \langle Tx, z\rangle \qquad \forall z$$

sost z con $-z$.

$$\langle f, z\rangle \ge \langle Tx, z\rangle \qquad \forall z.$$

$$\Rightarrow \quad \langle f, z\rangle = \langle Tx, z\rangle \quad \forall z\in X.$$

$$\Rightarrow \quad f = Tx \quad \text{in } X^*$$

TOPOLOGIE DEBOLI

Problema 1

Sia X un insieme (senza alcuna struttura).

Sia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di insiemi $\subset X$.

Voglio trovare la minima topologia per la quale tutti gli A_λ sono aperti.

ce n'è sempre una (discreta)

Basta fare l'intersezione delle topologie contenenti tutti gli A_λ.

In modo più operativo, si procede così.

TEOREMA La topologia meno fine contenente A_λ $\forall \lambda \in \Lambda$ è

$$\tau = \left\{ \bigcup_{\text{arbitraria}} \left(\bigcap_{\text{finita}} A_\lambda \right) \right\} \cup \emptyset \cup X$$

DIM. Dim. che τ è una topologia (ovviamente è la più piccola topologia possibile)

- Ovviamente τ è chiusa risp. alla unione arbitraria
- τ è chiusa risp. all'intersezione finita.

Basta farlo con due insiemi.

Siano $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \left(\bigcap_{j \in J_\lambda} A_j \right)$

finito

$$B = \bigcup_{\mu \in \Lambda''} \left(\bigcap_{k \in J_\mu} B_k \right)$$

$$A \cap B = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda' \\ \mu \in \Lambda''}} \left(\bigcap_{\substack{j \in J_\lambda \\ k \in J_\mu}} (A_j \cap B_k) \right) \qquad \square$$

immediato

Abbiamo provato che le intersezioni finite di elementi A_λ costituiscono una base di intorni per la topologia $\mathcal{T}$.

$\forall V$ aperto di $\mathcal{T}$, $\forall x \in V$ esiste una intersez. finita di A_λ, che chiamo A t.c.

$$x \in A \subset V.$$

PROBLEMA 2

Sia X un insieme (sempre senza struttura).
Siano $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ $i \in I$ famiglia arbitraria

sp. topologici.

La domanda è: trovare la topologia meno fine che rende continue tutte le φ_i.

Devo trovare la topologia meno fine che contiene gli insiemi della forma

$$\varphi_i^{-1}(U_i) \qquad U_i \text{ aperto di } Y_i$$

Abbiamo ~~visto~~ che devo prendere le unioni arbitrarie di intersezioni finite di questi insiemi, ossia prendo come base di intorni le intersezioni finite di controimmagini di aperti.

Esempio:

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

dotato dell'usuale topologia

Qual è la topologia meno fine su $\mathbb{R}^2$ che rende f continua?

Se U è un aperto di $\mathbb{R}$

$$f^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$$

la topologia richiesta è quella del tipo

$$\{ U \times \mathbb{R} , \quad \text{con} \quad U \subset \mathbb{R} \text{ aperto} \}$$

2. Trovare la topologia meno fine in $\mathbb{R}^2$ che rende continue le funzioni

$$f(x,y) = y - x^2$$

$$g(x,y) = y + x^2$$

Considero X dotato della topologia $\mathcal{T}$.

PROP 1 Sia $\{x_n\}$ una succ^{ne} in X, $x \in X$

Allora

$$\underbrace{x_n \to x \text{ in } X}_{\text{con la top. } \mathcal{T}} \iff \varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x) \text{ in } Y_i \quad \forall i \in I$$

Dim.

$\boxed{\Rightarrow}$ ovvia

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia A aperto di X t.c. $x \in A$.

$\exists$ intersezione finita

$$U = \bigcap_{i=1}^{N} \varphi_i^{-1}(V_i) \qquad \text{con } V_i \text{ aperto di } Y_i$$

t.c. $x \in U \subset A$.

$$\varphi_i(x) \in V_i \qquad \forall i = 1 \dots N.$$

aperti

$\to$ definitivamente $\varphi_i(x_n) \in V_i \quad \forall i = 1 \dots N$.

$\Rightarrow \quad x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i)$ def^{te} "

(cioè $\exists K_i$ t.c. $\forall n \geq K_i$ questo è vero)

$\Rightarrow \quad x_n \in \bigcap_{i=1}^{N} \varphi_i^{-1}(V_i) = U$ def^{te}

$\forall n \geq \max\{K_1, \dots K_N\}$. $\square$

PROP Sia Z uno sp. topologico.

$\psi : Z \to X$ (dotato della top. τ).

Allora ψ è continua $\iff$ $\varphi_i \circ \psi$ è continua da Z in Y_i

$$\begin{tikzcd} & & Y_i \\ Z \arrow[r, "\psi"] & X \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & & Y_j \end{tikzcd}$$

Dim. per esercizio.

PROBLEMA 3 (Caso particolare di 2: $Y_i = \mathbb{R}$).

Sia X spazio di Banach

Vogliamo considerare la topologia meno fine possibile che rende continue tutte le $f \in X^*$

Tale topologia si dice <u>topologia debole</u> di X e si indica con $\sigma(X, X^*)$

Chiameremo <u>topologia forte</u> di X quella indotta dalla norma.

Poiché ogni $f \in X^*$ è continuo nella topologia forte, la topologia debole è "più debole" (cioè meno fine, cioè con meno aperti) di quella forte.

A aperto debole / chiuso $\Longrightarrow$ A aperto forte / chiuso.

In generale la topologia debole è strettamente più debole di quella forte.

La topologia debole di X ha come base di intorni

PROP. Gli insiemi della forma

$$U(x_0; f_1, \dots f_N; \varepsilon) =$$

$$= \{ x \in X : \quad |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \}$$

dove $x_0 \in X$, $N \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots f_N \in X^*$,

$\varepsilon > 0$

costituiscono una ~~base~~ di intorni per la topologia debole $\sigma(X; X^*)$.

PROP La topologia $\sigma(X, X^*)$ separa i punti

cioè: è T_2.

cioè $\forall\, x, y \in X$ $\exists$ aperti disgiunti

A, B t.c. $x \in A$, $y \in B$

Dim Si considerano $\{x\}$ e $\{y\}$ e si applica Hahn-Banach e si trova $f \in X^*$ t.c.

$$f(x) < \alpha < f(y)$$

$$A = \{ f < \alpha \} \qquad\qquad B = \{ f > \alpha \}$$

aperti deboli