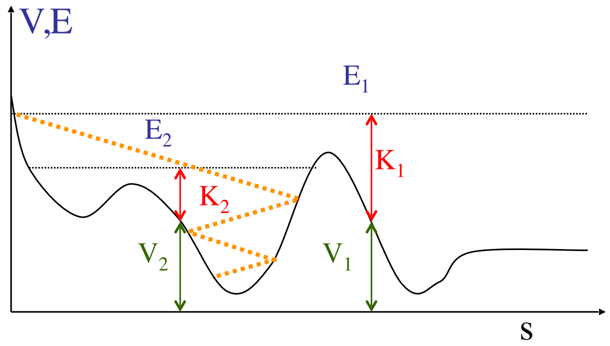
Dal potenziale alla dinamica del moto (FMUV 6.7.1,6.13)



Per una forza conservativa, la conoscenza di V in funzione di un parametro s qualunque permette di ricavare immediatamente l'andamento di K per lo stesso parametro.

P. es. vincolo liscio (guida o altro) + forza peso:

$$V(s) = mgh(s); \quad \frac{1}{2}mv^2 = K(s) = E - V(s); \quad |v(s)| = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}$$

Se il parametro è l'ascissa curvilinea, l'equazione precedente permette anche di ricavare la legge oraria per separazione di variabili:

$$v(s) = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{\pm ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}} \Rightarrow \quad t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(s)\right)}}$$

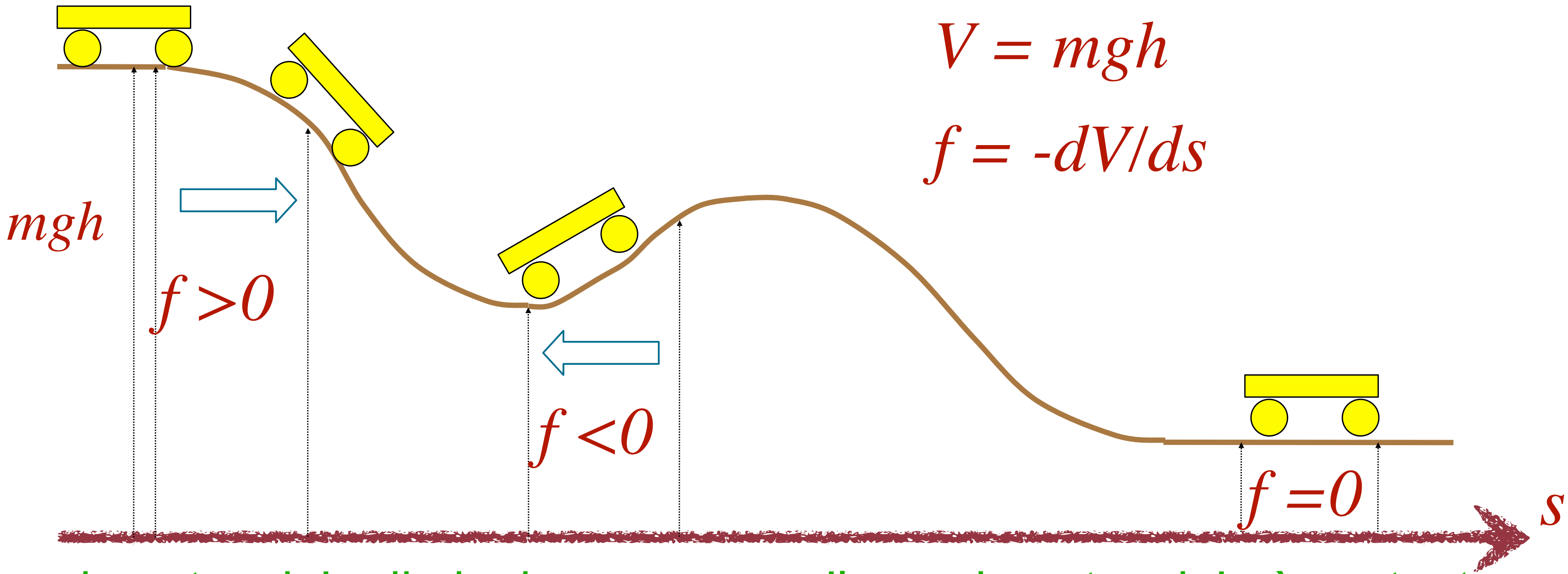
notiamo che in questo modo otteniamo la legge oraria con una sola integrazione.

La velocità iniziale è già contenuta in E che è detto un integrale primo del moto.

Come si può tener conto dell'attrito?

Spesso la sola visualizzazione grafica di un potenziale $V(x)$ permette di ricavare moltissime informazioni sulla dinamica del moto: $f = -dV(x)/dx$

Montagne russe e energia potenziale



l'energia potenziale diminuisce:
la velocità aumenta

l'energia potenziale è costante:
il moto è uniforme

l'energia potenziale aumenta:
la velocità diminuisce

Egidio Longo © Sapienza Università di Roma

invarianza e conservazione

Uniformità dello spazio: se lo spazio vuoto è dotato di un suo potenziale e lo spazio vuoto è uniforme, il suo potenziale deve essere costante (cioè invariante per traslazioni)

- tratto piano delle montagne russe: assenza di forze
- un punto materiale conserva la sua quantità di moto

invarianza per traslazioni dello spazio vuoto: conservazione della quantità di moto.

- ma è ragionevole assumere che lo spazio "vuoto" abbia un potenziale?
- interazioni fondamentali, spazio vuoto e potenziale nullo

Isotropia dello spazio vuoto: invarianza del suo potenziale per rotazioni

- tratto piano circolare delle montagne russe: assenza di momenti
- un punto materiale si muove di moto circolare uniforme e dunque conserva il suo momento angolare

invarianza per rotazioni: conservazione del momento angolare

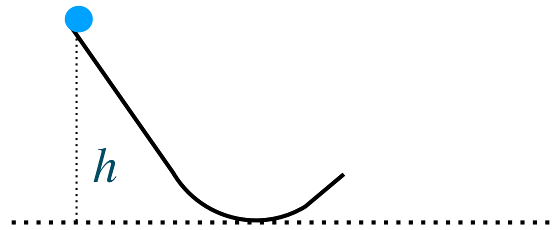
Moti "naturali":

- moto rettilineo uniforme
  - difficile da dimostrare a causa dell'attrito
- rotazione di un corpo rigido
  - facile da dimostrare con una trottola o un giroscopio (attrito trascurabile)
- moto circolare uniforme
  - moto vincolato da una guida (roulette)
  - moto dei pianeti

“Paradossi” della conservazione dell’energia

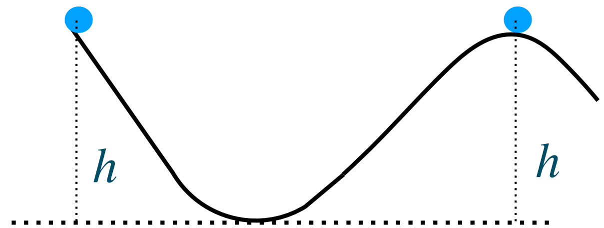
Trampolino di lancio

Qual è la massima quota alla quale arriverà la pallina dopo aver lasciato la guida?



Avvallamento

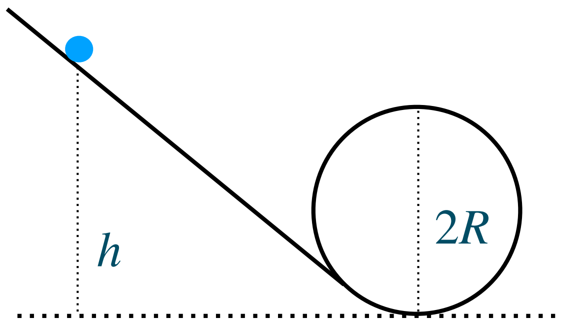
Cosa cambia se la guida prosegue fino a tornare alla quota di partenza?



Giro della morte

Da quale quota deve partire la pallina per completare il giro sulla guida circolare?

Per mantenere il contatto con la guida non basta una velocità piccola a piacere: in ogni punto la pallina è soggetta alla forza peso e alla reazione vincolare, per il contatto deve mantenere l’accelerazione richiesta dal moto circolare:



$$m\vec{g}\cdot\hat{n} + N = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$

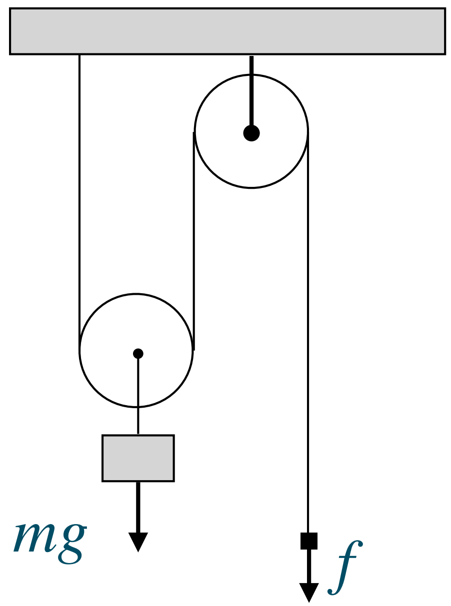
Nel punto più alto della circonferenza, la minima velocità è quella che non richiede una reazione vincolare: $v_a = \sqrt{gR}$

La conservazione dell’energia richiede $mgh = \frac{1}{2}mv_a^2 + 2Rmg \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{2}R$

Egidio Longo © Sapienza Università di Roma

Macchine semplici e potenza (FMUV 6.11-6.12)

Doppia carrucola:



con questo dispositivo, il lavoro della forza f applicata (trascurando l'energia cinetica delle masse in gioco) è uguale alla variazione di energia potenziale del sistema massa-carrucola, ma lo spostamento della massa è la metà dello spostamento del punto di applicazione della forza:

$$L_f = fh = mg\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{mg}{2}$$

E' sufficiente una forza pari a metà del peso da sollevare.

La doppia carrucola ha un vantaggio meccanico pari a 2.

Con n carrucole il vantaggio vale n

Potenza

La potenza è definita come il lavoro compiuto nell'unità di tempo.

La potenza istantanea è definita come

$$W = \frac{\delta L}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

ha dimensioni $[W] = [l^2 m t^{-3}]$ e si misura in watt: $1 \text{ W} = 1 \text{ N/s}$.

Oscillatore smorzato (FMUV 5.10)

Consideriamo una massa soggetta contemporaneamente alla forza elastica e alla resistenza del mezzo:

$$-kx - \beta v = ma \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

Se si conoscono due soluzioni particolari tra loro indipendenti (ossia che non abbiano un rapporto costante per qualunque valore di x) allora la soluzione generale è la somma di queste due soluzioni.

Cerchiamo una soluzione della forma $e^{\lambda t}$:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + \beta\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = e^{\lambda t}(m\lambda^2 + \beta\lambda + k) = 0$$

equazione verificata se e solo se λ è soluzione dell'equazione algebrica $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$, che in generale ammette due soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4mk}\right)$$

La soluzione generale è dunque della forma $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ dove C_1 e C_2 sono fissati da posizione e velocità ad un tempo dato, p. es. nell'istante iniziale.