Oss In uno sp. metrico generico

$$\overline{B(x_0,r)} \subset \{ x : \ d(x,x_0) \leq r \}$$

In uno spazio normato

$$\overline{B(x_0,r)} = \{ x : \ \| x - x_0 \| \leq r \}$$

Se $\|x - x_0\| = r$, basta prendere

$$x_0 + \alpha (x - x_0) \quad \text{con} \quad \alpha \uparrow 1$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle \alpha \to 1}$$

$$x$$

OSS Abbiamo detto che gli spazi L^p $(1<p<\infty)$ sono riflessivi, cioè $(L^p)^{**}$ si identifica con L^p tramite "l'iniezione canonica".

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto J_x$$

$$J_x(f) = f(x) \qquad \forall f \in X^*$$

J è un'isometria. Se è suriettiva diciamo che X è riflessivo.

Per dim che $L^p(0,1)$ (per semplicità) è riflessivo non basta fare il seguente ragionamento

$(L^p)^*$ si identifica con $L^{p'}$ mediante il thm. di Riesz. $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$(L^p)^{**}$ si identifica con $L^{(p')'} = L^p$ sempre mediante Riesz.

Questo dim. solo che $(L^p)^{**}$ è isometrico a L^p ma non dimostra che L^p è riflessivo.

Esistono esempi di spazi che sono <u>isometrici</u> al loro biduale ma non sono riflessivi (nel senso che J non è suriettiva).

Dimostriamo che $L^p(0,1)$ è riflessivo $(p \in (1,+\infty))$

Dobbiamo provare che $J : L^p \longrightarrow (L^p)^{**}$
è suriettiva, cioè che
$\forall \hat{g} \in (L^p)^{**} \quad \exists \; \bar{u} \in L^p$ t.c.
$\hat{g} = J_{\bar{u}}$

Costruiamo la mappa

$$g : \quad L^{p'} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\quad v \longmapsto \hat{g}(f_v)$$

$f_v \in (L^p)^*$ è definito da
$$f_v(u) = \int_0^1 vu \, dx \qquad \forall u \in L^p$$

Chiaramente $g \in (L^{p'})^*$: ovviamente è lineare.

$$|g(v)| = |\hat{g}(f_v)| \leq \|\hat{g}\|_{(L^p)^{**}} \|f_v\|_{L^{p*}} =$$
$$\|\hat{g}\|_{(L^p)^{**}} \|v\|_{L^{p'}}$$

Applico Riesz $\Rightarrow \exists \; \bar{u} \in L^{(p')'} = L^p$ t.c.

$$g(v) = \int v \bar{u} \, dx = f_v(\bar{u})$$
$$\| $$
$$\hat{g}(f_v)$$

$$\hat{g}(f_v) = f_v(\bar{u}) \quad \forall\, v \in L^{p'}$$

Ma sempre per Riesz ogni elemento di $(L^p)^*$ è della forma f_v per qualche $v \in L^{p'}$

$$\hat{g}(f) = f(\bar{u}) \quad \forall\, f \in (L^p)^*$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad J_{\bar{u}}(f)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g} = J_{\bar{u}} \quad \text{in } (L^p)^{**} \qquad \square$$

Esercizio Siano X, Y sp. Banach.

Sia $\{T_n\}$ una succ^{ne} in $\mathcal{L}(X,Y)$ t.c.

$\forall x \in X$ $T_n x$ converge in Y a un elemento che chiamiamo Tx.

Mostrare che se $x_n \to x$ in X, allora

$$T_n x_n \longrightarrow Tx$$

Dim. Per Banach–Steinhaus e i suoi corollari

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C.$$

T è ovviamente lineare, e per Banach Steinhaus è continuo $\Rightarrow T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\|T_n x_n - Tx\|_Y \leq \|T_n x_n - T_n x\|_Y + \underbrace{\|T_n x - Tx\|_Y}_{\to 0 \text{ per hyp.}} \to 0$$

$$\|T_n x_n - T_n x\|_Y \leq \underbrace{\underbrace{\|T_n\|_{\mathcal{L}}}_{\leq C} \; \underbrace{\|x_n - x\|_X}_{\to 0}}_{\to 0}$$

Se $Y = \mathbb{R}$, è chiaro che se

$$f_n \to f \text{ in } X^* \quad \text{e} \quad x_n \to x \text{ in } X$$

è facile provare che

$$f_n(x_n) \to f(x) \text{ in } \mathbb{R}$$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\le \|f_n - f\|_{X^*} \|x_n\|} + |\underbrace{f(x_n) - f(x)}_{\to 0}|$$

$\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$, $\|x_n\| \le c$

$\to 0$ perché $f \in X^*$

L'esercizio precedente dice che per passare al limite in $f_n(x_n)$ in realtà non è necessario la convergenza forte di f_n a f, ma basta la conv. puntuale.

Su questo tipo di convergenza torneremo quando parleremo di convergenze deboli.

TEOREMA dell'APPLICAZIONE APERTA

X, Y spazi di Banach (è importante la completezza di entrambi)

Sia $T: X \to Y$ lineare, continua e suriettiva.

Allora T è un'applicazione aperta
(cioè U aperto di $X \Rightarrow T(U)$ aperto di Y)

importante anche in dim. finita

Dim.

Step 1 Osserviamo che basta dim. la seguente proposizione

PROP Nelle stesse ipotesi $\exists\, c > 0$ t.c.

$$B_Y(0, c) \subset T(B_X(0,1))$$

Infatti, supponendo che la proposiz. sia vera, sia U un aperto di X. Mostriamo che $T(U)$ è aperto in Y.

Sia $y_0 = T(x_0)$ con $x_0 \in U$

devo trovare una palla centrata in y_0 tutta contenuta in $T(U)$.

U aperto $\Rightarrow \exists r$ t.c. $B_X(x_0,r) \subset U$

$$\Rightarrow \quad T(B_X(x_0,r)) \subset T(U)$$

$$\| $$

$$T(x_0 + r B_X(0,1))$$

$$\|$$

$$\underbrace{\cancel{T(x_0)}}_{y_0} + r \underbrace{T(B_X(0,1))}_{\supset B_Y(0,c)}$$

Per la prop. $\exists c$. t.c. $B_Y(0,c) \subset T(B_X(0,1))$

$$\Rightarrow \quad B_Y(y_0, rc) \subset T(U)$$

Dobbiamo solo provare la prop.

Step 2 Mostriamo prima che

$$\exists c > 0 \qquad B_Y(0,c) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$$

attenzione, contenuto nella chiusura

Per far questo usiamo il teorema di Baire in Y (serve Y completo).

Definiamo

$C_n = n \overline{T(B_X(0,1))}$ chiuso di Y.

Osserviamo che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = Y \quad (\text{si usa la suriettività di } T)$$

$$y \in Y \overset{\text{suriett.}}{\Longrightarrow} y = T(x)$$

$$y = 2\|x\| \underbrace{T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)}_{\in\, T(B_X(0,1))} \in 2\|x\| \, T(B_X(0,1)) \subset$$

$$\subset n \overline{T(B_X(0,1))}$$

non appena $n \geq 2\|x\|$

Per Baire $\exists$ C_N che ha interno non vuoto.

$$B_Y(y_0, r) \subset C_N = N \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$\Longrightarrow$$

$$y_0 \in N \underbrace{\overline{T(B_X(0,1))}}_{\text{simmetrico risp. all'orig.}}$$

$$\Rightarrow -y_0 \in N \overline{T(B_X(0,1))}$$

Sommo :

$$\Rightarrow B_Y(0, r) \subset N \overline{T(B_X(0,1))} + N \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$B_Y(0,r) \subset N\,\overline{T(B_X(0,1))} + N\,\overline{T(B_X(0,1))} \subset$$
$$\subset 2N\,\overline{T(B_X(0,1))}$$

<u>OSS</u> se K è convesso allora

$$K + K \subset 2K.$$

Sia $x+y \in K+K$

$$x+y = 2\,\frac{x+y}{2} \in 2K$$

$\uparrow$ per convessità
K

$B_X(0,1)$ convesso $\Rightarrow$ $T(B_X(0,1))$ convesso

$\Rightarrow$ $\overline{T(B_X(0,1))}$ convesso

$\Rightarrow$ $B_Y\left(0, \frac{r}{2N}\right) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$ <u>fine step 2</u>

<u>Step 3.</u> Rimuovere la chiusura.

Supponiamo di aver trovato $c > 0$ t.c.

$$B_Y(0,2c) \subset \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Voglio provare che

$$B_Y(0,c) \subset T(B_X(0,1))$$

Sia $y \in Y$ t.c. $\|y\|_Y < c$. Vogliamo trovare $x \in X$ t.c. $\|x\|_X < 1$ e $y = T(x)$

Poiché $B_Y(0,2c) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$

$\Rightarrow \underset{y \in}{} B_Y(0,c) \subset \overline{T\left(B_X\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)}$

$\Rightarrow \exists\ z_1 \in X$ t.c $\|z_1\|_X < 1/2$

$\|y - Tz_1\|_Y < \frac{c}{2}$.

ma $\underset{y - Tz_1 \in}{} B_Y\left(0,\frac{c}{2}\right) \subset \overline{T\left(B_X\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)}$

$\Rightarrow \exists\ z_2 \in X$ t.c. $\|z_2\|_X < \frac{1}{4}$ e

$\|y - Tz_1 - Tz_2\|_Y < \frac{c}{4}$

Trovo così una succ^{ne} $\{z_n\}$ t.c.

$\{z_n\} \subset X$, $\|z_n\|_X < \frac{1}{2^n}$

$$\left\|y - T\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\right\|_Y < \frac{c}{2^n}$$

Ora la serie $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ è una serie totalmente convergente

cioè $\sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\|_X < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

<u>OSS</u> In uno sp. di Banach ogni succ^{ne} totalmente convergente è convergente.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} z_i = x \quad \text{, nel senso che}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \longrightarrow x \qquad \text{in} \quad X$$

e $\quad \|x\|_X \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\|_X < 1.$

Dalla formula evidenziata:

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\right\|_Y < \frac{c}{2^n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\|y - Tx\| \qquad\qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = Tx \qquad\qquad \square$$

Conseguenze del teorema della mappa aperta:

COROLLARIO 1 X, Y sp. di Banach

$T : X \to Y$ lineare, continuo e biettivo

Allora T^{-1} è continuo.

Cioè T è un isomorfismo.

Dim

Per dim che T^{-1} è continua, devo provare che la controimmagine mediante T^{-1} di ogni aperto in X è un aperto in Y.

$$U \text{ aperto in } X \implies \underbrace{(T^{-1})^{-1}(U)}_{= T(U)} \text{ aperto in } Y$$

$\square$

COROLLARIO Sia X uno sp. vettoriale su cui sono date due norme $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$.

Sia X di Banach rispetto a entrambe le norme.

Se $\exists\, c_1$ t.c. $\|x\| \leq c_1 |||x||| \quad \forall x \in X \quad (*)$

allora $\exists\, c_2$ t.c. $|||x||| \leq c_2 \|x\| \quad \forall x \in X$.

(Cioè le due norme sono equivalenti)

<u>Dim</u> Prendiamo

$$I : (X, |||\cdot|||) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$$

è continua per la (*)

Per il Corollario 1, anche la sua inversa

$$I : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, |||\cdot|||)$$

è continua,

cioè vale l'altra disug.

<u>COROLLARIO 3</u> (Teorema del grafico chiuso)

X, Y spazi di Banach.

$T: X \to Y$ lineare.

Se il grafico

$$G(T) = \{(x,y) \in X \times Y : \quad y = T(x)\}$$

è chiuso in $X \times Y$,

(cioè: se $\left. \begin{array}{ll} x_n \to x & \text{in } X \\ Tx_n \to y & \text{in } Y \end{array} \right| \Rightarrow y = Tx$)

allora T è continua

<u>OSS</u> Ovviamente ogni funzione continua ha il grafico chiuso, il teorema dice che vale anche il viceversa se X, Y Banach e T lineare.