Martedì 26/3 Lezione 15:00 → 16:30
senza pausa.

Conseguenze del teorema di Baire.

1. Sia $\{q_i\}$ una successione di tutti i razionali di $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(q_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \supsetneq \mathbb{Q}$$

Questa intersezione contiene strettamente i razionali.

Supponiamo che l'intersezione sia esattamente $\mathbb{Q}$.

L'insieme a 1° membro si può scrivere come

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(q_i - \frac{1}{k2^i}, q_i + \frac{1}{k2^i}\right)}_{= O_k}$$

quindi come intersezione numerabile.

O_k è aperto denso in $\mathbb{R}$.

Sia $U_k = \mathbb{R} \setminus \{q_k\}$ aperto denso.

$$\bigcap_k U_k = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ Se considero la famiglia numerabile $\{U_k\} \cup \{O_k\}$ è di aperti densi e la sua intersezione è $\emptyset$, che per Baire dovrebbe essere denso $\Longrightarrow$ assurdo.

2^a conseguenza

Esistenza di funzioni continue in un intervallo ma non derivabili in nessun punto.

1^a possibilità (esplicita): funzione di Weierstrass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

b intero dispari ≥ 7.

$a \in (0,1)$ t.c. $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

2^a possibilità: con il teorema di Baire.

Sia $X = C([0,1])$ con la norma $\|f\| = \max_{[0,1]} |f(x)|$

spazio di Banach

Definiamo $C_n = \{ f \in X : \exists x \in [0,1]$ t.c. tutti i rapporti incrementali costruiti su x sono in modulo $\leq n \} =$

$= \{ f \in X : \exists x \in [0,1]$ t.c. $\forall h \neq 0$ con $x+h \in [0,1]$ si ha

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n \}$$

Allora: 0) $C_n \neq \emptyset$

1) Ogni C_n è chiuso in X

2) Ogni C_n è a interno vuoto.

Si può applicare il teorema di Baire e concludere che l'unione $\bigcup_n C_n$ ha interno vuoto.

In particolare $\exists\, f \notin \bigcup_n C_n$.

$f \notin C_n$ significa: $\forall x \in [0,1]$ $\exists\, h = h(x) \neq 0$ t.c.

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > n$$

$f \notin \bigcup_n C_n$ $\forall n$ $\forall x \in [0,1]$ $\exists\, h_n$ t.c.

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| > n.$$

OSS Non può essere $|h_n| \geq \varepsilon > 0$ perché altrimenti il rapporto incrementale sarebbe limitato.

$\Rightarrow$ Posso estrarre una sottosucc^{ne} t.c. $h_n \to 0$

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ f non derivabile in x.

ma x è arbitrario $\Rightarrow$ f non è derivabile in nessun punto.

Dim. che C_n è chiuso.

Sia $\{f_k\}$ una successione in C_n t.c.

$f_k \to f$ in X, cioè uniformemente.

Devo provare che $f \in C_n$.

Sappiamo che $\forall k$ $\exists x_k$ t.c. $\forall y \in [0,1] \setminus \{x_k\}$

$$\left| \frac{\overbrace{f_k(y)}^{f(y)} - \overbrace{f_k(x_k)}^{f(x)\ (\text{per la c.u.})}}{\underbrace{y - x_k}_{y-x}} \right| \leq M$$

$\{x_k\} \subset [0,1] \Rightarrow$ B-W $\Rightarrow$ estraggo una sottosucc^{ne} convergente a x.

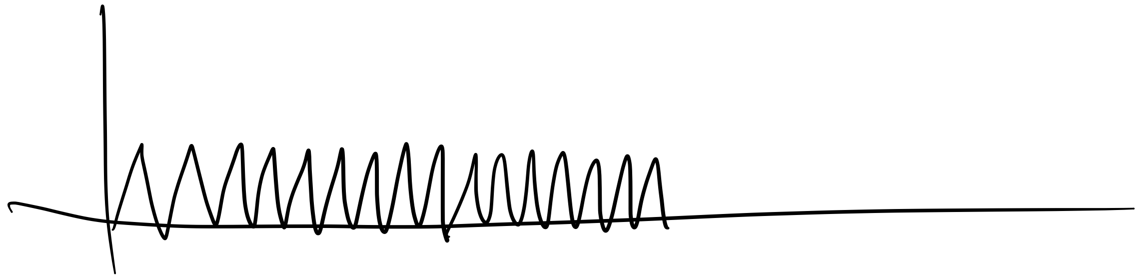
$$\Rightarrow \frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \leq M \quad \forall y \neq x$$

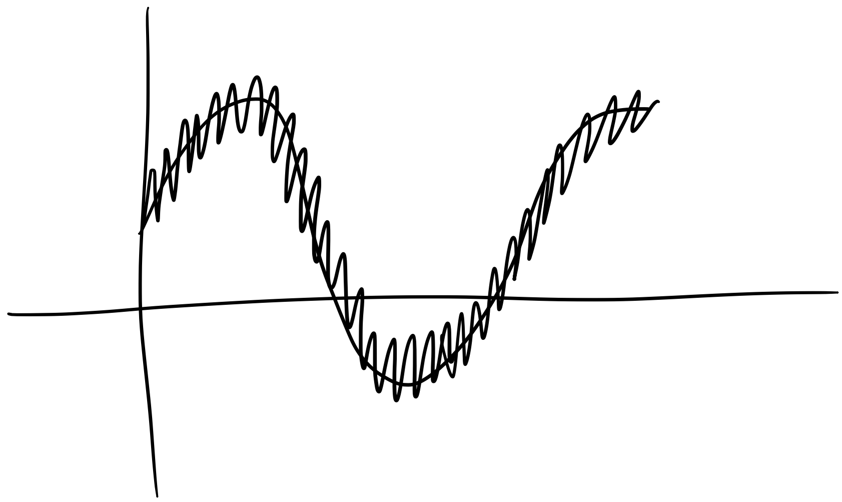
$$\Rightarrow f \in C_n$$

2) C_n hanno interno vuoto.

Mostro che ogni funzione continua si può approssimare uniformemente con funzioni non in C_n.

Esempio di funzione non in C_n





TEOREMA DI BANACH-STEINHAUS
(principio di uniforme limitatezza).

Siano X, Y spazi di Banach (in realtà Y non serve completo)

Sia $\{T_i\}_{i\in I}$ una famiglia (anche non numerabile)

di operatori $T_i : X \longrightarrow Y$ lineari e continui, t.c.

$$\forall x \in X \qquad \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_Y < +\infty$$

Allora $\exists$ costante $M \geq 0$ t.c.

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M \qquad \forall i \in I.$$

cioè

$$\|T_i x\|_Y \leq M \|x\|_X \qquad \forall i \in I, \forall x \in X.$$

OSS
Risultato sorprendente: la limitatezza puntuale implica la limitatezza globale

DIM

Dim per $n \in \mathbb{N}$ chiamo

$$C_n = \{x \in X : \|T_i x\|_Y \leq n \quad \forall i \in I\}$$

C_n chiusi (intersezione di chiusi).
si è già usata la continuità di T_i

$$\bigcup_n C_n = X$$

Infatti sia $x \in X \Rightarrow$ sia $M(x) = \sup_i \|T_i x\|_Y < +\infty$

$\Rightarrow$ se $n \geq M(x)$ $\quad x \in C_n$

(Baire) $\Longrightarrow$ $\exists\, C_N$ a interno non vuoto

Fissiamo un tale C_N e consideriamo una palla $B(x_0, r) \subset C_N$, anzi possiamo supporre
Anzi, rimpicciolendo r
$x \in C_N \ \forall x$ t.c. $\|x - x_0\| \leq r$.

$\Longrightarrow$ $\forall\ x = x_0 + r z$ dove $\|z\|_X \leq 1$

si ha $\|T_i x\|_Y \leq N$ $\quad \forall i \in I$, $\forall x$ così fatto.

$$\|T_i(x_0) + r\, T_i(z)\|_Y$$

$$\|r\, T_i(z)\|_Y = \|(T_i(x_0) + r\, T_i(z)) - T_i(x_0)\|_Y \leq$$

$$\leq \|T_i(x_0) + r\, T_i(z)\|_Y + \|T_i(x_0)\|_Y \leq$$

$$\leq 2N \qquad \forall i \in I \ \forall z \text{ t.c. } \|z\| \leq 1$$

$$\|T_i(z)\| \leq \frac{2N}{r} \qquad \forall i \in I \quad \forall z \text{ di norma } \leq 1.$$

$$\Rightarrow \quad \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2N}{r} \qquad \forall i \in I$$

Conseguenze di BANACH-STEINHAUS.

La prima è che il limite puntuale di una successione di operatori lineari e continui è lineare (ovviamente!) e continuo (sorprendente)

COROLLARIO 1 X, Y spazi di Banach.

$T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ una successione di operatori lineari e continui che converge puntualmente, cioè

$\forall x \in X$ $\quad T_n(x)$ converge in Y a un limite che chiamiamo $T(x)$

OSS ovviamente T è lineare.

Allora:

1) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

2) T è continuo

3) $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

OSS in generale non si ha $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$

cioè non si ha $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \xrightarrow{n} 0$

DIM 1) $T_n x \to Tx \Rightarrow \|T_n x\| \leq c(x)$

$\underset{\text{B. Steinhaus}}{\Longrightarrow}$ $\|T_n\| \leq M$.

2) $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq C\|x\|$

$$\Big\downarrow n \to +\infty$$

$\|Tx\|$ $\qquad \|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in X$

3) $\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leq \liminf_n \|T_n\| \, \|x\|$

$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}} \leq \liminf_n \|T_n\|.$

COROLLARIO 2

X spazio di Banach

Sia B un sottoinsieme di X t.c.

$\forall f \in X^*$ $\quad f(B)$ sia limitato in $\mathbb{R}$

cioè $\quad \|f(x)\| \leq M_f \quad \forall x \in B$.

Allora B è limitato.

Ovvio in dim. finita (per es. $\mathbb{R}^N$) perché tra i funzionali lineari (e continui) ci sono le proiezioni sugli assi. Quindi se tutte le componenti degli elementi di B sono limitate $\Rightarrow$ B è limitato.

Dim. Consideriamo i funzionali di $(X^*)^*$ dell'iniezione canonica.

$$J_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \in B$$
$$f \longmapsto f(x)$$

gioca il ruolo di $i \in I$

Questi funzionali lineari e continui sono limitati puntualmente

Fisso $f \in X^*$

$$|J_x(f)| = |f(x)| \quad \text{limitato per ipotesi.}$$

Banach - Steinhaus $\Rightarrow$ $\|J_x\|_{X^{**}} \leq C \quad \forall x \in B$

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$$

perché l'iniezione canonica è un'isometria

<u>OSS</u> Questo vale anche se X non è completo (perché X^* lo è).

Vale l'enunciato "duale"

<u>TEOREMA</u> X sp. di Banach.
Sia $B \subset X^*$ un insieme t.c.

$\forall x \in X \quad \{f(x) : f \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$,
allora B è limitato in X^*.

(è esattamente Banach-Steinhaus)

<u>TEOREMA</u> dell'applicazione aperta
X, Y sp. di Banach (serve la completezza sia di X che di Y)

Sia $T: X \to Y$ lineare, continua e suriettiva

necessario anche in dim. finita

Allora T è un'applicazione aperta
(cioè trasforma aperti di X in aperti di Y)

cioè $\quad U$ aperto in $X \implies T(U)$ aperto in Y