Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$F_g : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f * g$$

$$(F_g(f))(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$\|F_g(f)\|_{L^p} = \|f * g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

$\Rightarrow$ $F_g$ è lineare e continuo da $L^p$ in $L^p$.

$F_g \in \mathcal{L}(L^p) = \mathcal{L}(L^p, L^p)$

$$\|F_g\|_{\mathcal{L}} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Pb.: $\|F_g\|_{\mathcal{L}} = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ?

$\underline{\underline{\text{sì}}}$ se $g(x) \in L^1_+(\mathbb{R}) = \{ g \in L^1(\mathbb{R}) : g(x) \geq 0 \text{ q.o.} \}$

Prendiamo $f_n(x) = (2n)^{-1/p} \chi_{(-n,n)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-n,n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\|f_n\|_{L^p}^p = \int_{-n}^{n} (2n)^{-1/p \cdot p}\, dx = \frac{2n}{2n} = 1.$$

$$\|F_g\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{f \in L^p(\mathbb{R}) \\ \|f\|_p = 1}} \|F_g(f)\|_p$$

$$F_g(f_n)(x) = (f_n * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(x-y)}_{=\begin{cases}(2n)^{-1/p} & \text{se } x-n<y<x+n\\ 0\end{cases}} g(y)\,dy =$$

$$= (2n)^{-1/p}\int_{x-n}^{x+n} g(y)\,dy$$

$$\|f_n * g\|_p^p = \frac{1}{2n}\int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{x-n}^{x+n} g(y)\,dy\right]^p = (*)$$

OSS se $p=1$ basta applicare Fubini per concludere (esercizio).

Supponiamo $p>1$.

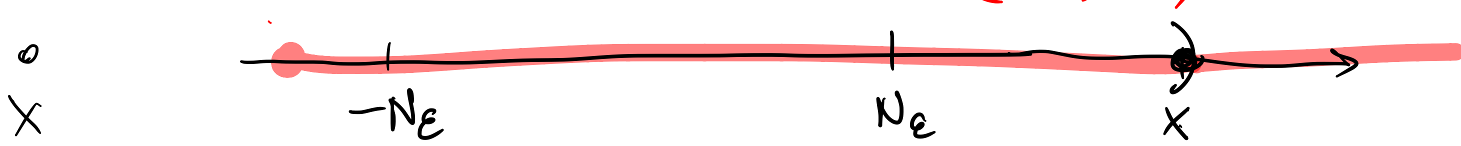
$\boxed{\text{prendo } n > N_\varepsilon}$

$\exists\ N_\varepsilon$ t.c.

$$\int_{-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} g(y)\,dy \geq \|g\|_1 - \varepsilon$$

$$(*) \geq \frac{1}{2n}\int_{-(n-N_\varepsilon)}^{(n-N_\varepsilon)} dx \left[\int_{x-n}^{x+n} g(y)\,dy\right]^p = (*)$$

OSS questo intervallo contiene $(-N_\varepsilon, N_\varepsilon)$




voglio che sia $\quad x-n < -N_\varepsilon$

$$\boxed{x < n - N_\varepsilon}$$

$x+n > N_\varepsilon \qquad x > -(n-N_\varepsilon)$

$$-(n-N_\varepsilon) < x < n - N_\varepsilon$$

$$(*) \geq \frac{1}{2n} \int_{-(n-N_\varepsilon)}^{n-N_\varepsilon} dx \Bigg[ \underbrace{\int_{-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} g(y)\,dy}_{\substack{\vee\!/ \\ \|g\|_1 - \varepsilon}} \Bigg]^p \geq$$

$$\geq \frac{1}{2n} \int_{-(n-N_\varepsilon)}^{n-N_\varepsilon} dx \, \left(\|g\|_1 - \varepsilon\right)^p =$$

$$= \frac{\cancel{2}(n-N_\varepsilon)}{\cancel{2}n} \left(\|g\|_1 - \varepsilon\right)^p$$

$$\Rightarrow \quad \|f_n * g\|_p \geq \left(\frac{n-N_\varepsilon}{n}\right)^{1/p} \left(\|g\|_1 - \varepsilon\right)$$

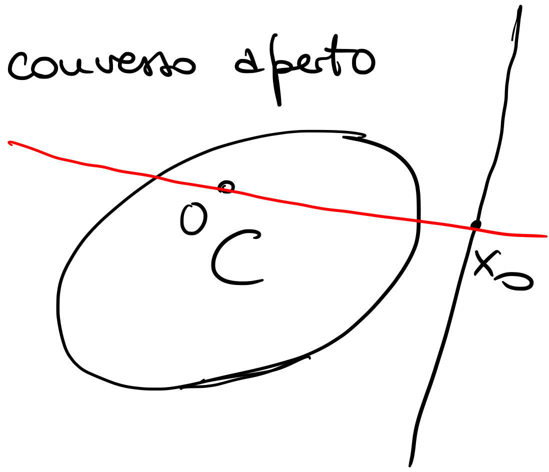
$$\Rightarrow \quad \|F_g\|_{\mathcal{L}} \geq \|f_n * g\|_p \geq \underbrace{\left(\frac{n-N_\varepsilon}{n}\right)^{1/p}}_{\substack{\downarrow\, n \to +\infty \\ 1}} \left(\|g\|_1 - \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|F_g\|_{\mathcal{L}} \geq \|g\|_1 - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \quad \|F_g\|_{\mathcal{L}} \geq \|g\|_1$$

Il caso $p = \infty$ è semplice

**PROPOSIZIONE** (Separazione di un convesso aperto da un pto.)




$X$ sp. normato,
$C$ convesso aperto (e non vuoto)
Sia $x_0 \notin C$
Allora $\exists\, f \in X^*$ t.c.

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

**DIM** Possiamo supporre $0 \in C$, altrimenti si trasla. sia $x_1 \in C$ $\quad X \xrightarrow{\text{sost.}} X - X_1$ (esercizio)

Consideriamo il sottospazio $G$ generato da $x_0$

$$G = \{t x_0 : t \in \mathbb{R}\}$$

Definiamo
$$g : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{R} \\ t x_0 \longmapsto t \end{array}$$

Sia $p(x)$ il funzionale di Minkowski relativo a $C$.

<u>OSS</u> $\quad p(x_0) \geq 1$ perché $x_0 \notin C$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{p(t x_0)}{t}} \quad \forall t > 0.$$

$$\Longrightarrow \quad p(t x_0) \geq t \qquad \forall t > 0$$

$$g(t x_0) = t \leq p(t x_0) \qquad \forall t > 0$$

ma è ovvio anche per $t \leq 0$, perché $p \geq 0$

$$g \leq p \qquad \text{su } G.$$

Ne segue [Hahn-Banach, 1ª formulaz. analitica]

$g$ si estende ad un funzionale lineare

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t.c.$$

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Questo è il funzionale cercato.

$$f(x) \leq p(x) \leq C\,\|x\| \Rightarrow f \text{ è continuo.}$$

Sia ora $x \in C$

$$f(x) \leq p(x) < 1 \qquad = g(x_0) = f(x_0)$$

$\square$

## TEOREMA di HAHN-BANACH (1ª vers. geometrica)

$X$ spazio normato.

$A, B \subset X$ convessi disgiunti e non vuoti.

$A$ aperto.

Allora $\exists$ un iperpiano chiuso $[f = \alpha]$ che separa $A$ e $B$, cioè

$$\exists f \in X^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad t.c.$$

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \qquad \begin{array}{l} \forall a \in A \\ \forall b \in B \end{array}$$

**Dim** Sia $C = A - B = \{x = a - b : a \in A, b \in B\}$

$C$ aperto $\quad C = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\})$ (unione di aperti)

$C$ convesso (differenza algebrica di insiemi convessi)

Inoltre $0 \notin C$ perché $A$ e $B$ disgiunti.

[Prop] $\Longrightarrow \exists f \in X^*$ t.c.

$$\begin{array}{l} f(x) < f(0) = 0 \qquad \forall x \in C \\ \parallel \\ f(a-b) \\ \parallel \\ f(a) - f(b) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad f(a) < f(b) \qquad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

Prendo $\alpha$ compreso tra questi due numeri.

$\Longrightarrow [f = \alpha]$ separa i due insiemi. $\square$

**OSS** Non si può togliere l'hyp. che $A$ sia aperto.
In dim infinita si possono dare esempi di due insiemi convessi $A, B$ disgiunti e chiusi che non possono essere separati da un iperpiano chiuso

$\Longrightarrow$ Esercizio su Brezis in $\ell^1$

In dim finita è più facile

Sia $X$ uno sp. normato di dim finita.

Siano $A, B$ due convessi disgiunti.
Allora si possono separare con un iperpiano chiuso. ($\to$ Brezis).

## TEOR. DI HAHN-BANACH (2ª vers. geometrica)

$X$ sp. normato; $A, B$ convessi non vuoti disgiunti;

$A$ chiuso

$B$ ~~chiuso~~ compatto. Allora $\exists$ un iperpiano chiuso $[f=\alpha]$ che separa strettamente $A$ e $B$

$$\left( \exists \varepsilon > 0 : \quad \begin{array}{ll} f(a) \leq \alpha - \varepsilon & \forall a \in A \\ f(b) \geq \alpha + \varepsilon & \forall b \in B \end{array} \right)$$

**Dim** Sia $C = \{a-b : a \in A, b \in B\}$.

$C$ è convesso (come prima).

$C$ è chiuso. (non si può fare come prima, sfrutterò la compattezza)

Sia $x_n \in C$, $x_n \to x \overset{?}{\Longrightarrow} x \in C$

$x_n = a_n - b_n \qquad a_n \in A, \; b_n \in B$

$B$ è compatto $\to$ posso estrarre una sottosucc$^{ne}$ t.c. $b_n \to b \in B$

$\Rightarrow a_n = x_n + b_n \longrightarrow x + b = a \in A$ perché $A$ chiuso

$$\Rightarrow \quad x = a - b \in C.$$

$$0 \notin C \overset{C \text{ chiuso}}{\Longrightarrow} \exists \; B_r(0) \text{ t.c. } B_r(0) \cap C = \emptyset$$

aperto convesso

Uso (Hahn-Banach, 1ª vers. geometrica) $\Rightarrow$

$\exists \; f \in X^*$ che separa $B_r(0)$ e $C$, cioè

$$f(a-b) \le \frac{r}{2} f(z) \qquad \forall z \in X \text{ t.c. } \|z\| \le 1.$$

Infatti

$$f(a-b) \le \alpha \le f(x) \qquad \forall x \in B_r(0)$$

$$\le f\left(\frac{r}{2} z\right) \qquad \forall z \in X \text{ t.c. } \|z\| \le 1$$

Passo all'inf su $z$ t.c. $\|z\| \le 1$.

$$f(a) - f(b) \le -\frac{r}{2} \|f\|_{X^*} = -2\varepsilon$$

Sia $\varepsilon = \frac{r}{4} \|f\|_{X^*}$

$$f(a) + \varepsilon \le f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A \; \forall b \in B.$$

$$\Rightarrow \sup_{a \in A} f(a) + \varepsilon \le \inf_{b \in B} f(b) - \varepsilon$$

Si prende $\alpha = \frac{1}{2} \left( \sup_A f(a) + \inf_B f(b) \right)$ $\square$

**COROLLARIO 1** $X$ spazio normato, $G \subset X$ sottospazio t.c. $\overline{G} \neq X$, cioè $G$ non denso in $X$.

Allora $\exists f \in X^*$ t.c. $f \neq 0$, ma $f|_G = 0$

---

Sia $x_0 \in \cancel{X} \setminus \overline{G}$. Applico il teor. precedente

con $A = \overline{G}$ convesso? sì perché è un sottosp.

Siano $x \in A \Leftrightarrow \exists x_n \in G$ t.c. $x_n \to x$

$y \in A$ $\quad \exists y_n \in G$ t.c. $y_n \to y$.

$$t x + (1-t) y = \lim_n \big( \underbrace{t x_n + (1-t) y_n}_{\in G} \big)$$

(quindi: la chiusura di un convesso è convessa)
(" " " " sottosp. è un sottospazio)

$$\Rightarrow t x + (1-t) y \in A$$

$B = \{x_0\}$ compatto e convesso.

$\Rightarrow$ Quindi [Hahn-Banach, 2ª vers. geometrica]

$\exists$ un iperpiano che separa strett. $A$ e $B$, quindi

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in A$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in G$$

$f(x) < \alpha \quad \forall x \in G$ sp. vett.

L'unico funzionale limitato superiormente in uno sp. vettoriale G è quello nullo

$$\Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in G.$$

$$f(x_0) > 0$$

$\square$

**COROLLARIO 2** $X$ sp. normato, $G$ sottosp. di $X$

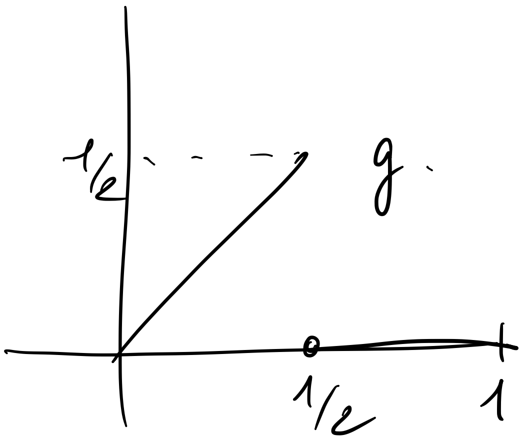
Se dimostro che ogni funzionale lineare e continuo che si annulla identicamente su $G$ si annulla anche su tutto $X$, ho provato che $G$ è denso in $X$

Esercizio:

$$T: \quad L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$

$$(Tf)(x) = g(x) f(x)$$

dove $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1/2 \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$



- T è continuo?
- calcolare la norma di T.

<u>oss che</u> $f(x)g(x) \in L^2(0,1)$ in quanto prodotto di $f \in L^2$ per $g \in L^\infty$

$$\int_0^1 f(x)^2 g(x)^2 dx \leq \|g\|_\infty^2 \int_0^1 f(x)^2 dx = \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2$$

$T$ è lineare ovviamente

$$\|Tf\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_2 .$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{L}(L^2) \quad e \quad \|T\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{2} .$$

Cerco $f_n \in L^2$ $\quad \|f_n\|_2 = 1$ t.c

$$\|Tf_n\|_2 \longrightarrow 1/2 .$$

Basta prendere

$$f_n(x) = \sqrt{n}\ \chi_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)}(x) \qquad (\text{norma } 1)$$

$$Tf_n = \sqrt{n}\ x\ \chi_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$\|Tf_n\|_2^2 = n \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} x^2\, dx = \frac{n}{3}\left(\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{n}{24}\Bigg(\underbrace{1 - \left(1-\frac{2}{n}\right)^3}_{\sim \frac{6}{n}}\Bigg) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

Quindi $\quad \|T\| = \dfrac{1}{2}$