Resistenza di un mezzo fluido (FMUV 5.5)

Per un moto laminare (bassa velocità, assenza di turbolenze, tipicamente in un liquido) la forza è proporzionale e opposta a v, secondo la legge di Stokes $\vec{f}_R = -\beta \vec{v}$ dove $\beta = f(\eta)$ dipende dalla forma del corpo e da η, coefficiente di viscosità del mezzo. Per una sfera $\beta = 6\pi R\eta$

Ad esempio, caduta verticale: $-mg - \beta\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \frac{\beta}{m}v + g = 0$

eq. differenziale lineare non omogenea del primo ordine per la velocità, la cui soluzione si ottiene sommando la soluzione dell'eq. omogenea associata $\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}v$

che è un'esponenziale decrescente: $v_{omogenea}(t) = Ve^{-\frac{\beta}{m}t}$

con la soluzione particolare costante dell'eq. non omogenea: $v_{part} = -\frac{mg}{\beta}$

La soluzione completa dell'eq. differenziale è quindi

$$v(t) = Ve^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} = \left(v_0 + \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta}$$

considerando che la costante V è determinata dalla velocità iniziale:

$$v(0) = v_0 = V - \frac{mg}{\beta} \quad \Rightarrow \quad V = v_0 + \frac{mg}{\beta}$$

che andamento rappresenta questa formula?
qual è la velocità per tempi lunghi?

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta}$$

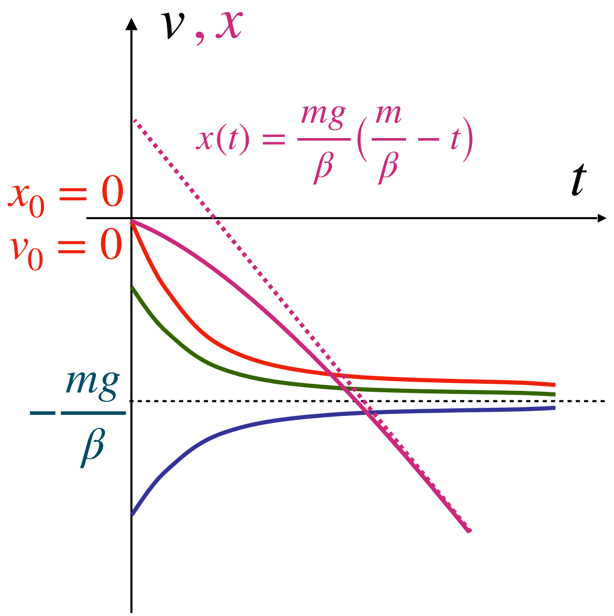
La velocità tende asintoticamente al valore

$$v(t \to \infty) = v_\infty = -\frac{mg}{\beta}$$

indipendentemente dalla velocità iniziale.

Se $v_0 = 0$, ossia se il punto parte da fermo,

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)$$



La legge oraria (sempre per $v_0 = 0$) si può ottenere integrando la velocità:

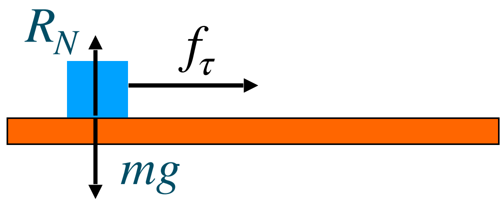
$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)dt = \frac{mg}{\beta}\int_0^t \left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)dt = \frac{m^2 g}{\beta^2}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) - \frac{mg}{\beta}t$$

La velocità asintotica è quella per la quale la forza peso è bilanciata esattamente dalla resistenza del mezzo: questo è vero anche quando l'approssimazione lineare di Stokes non vale.

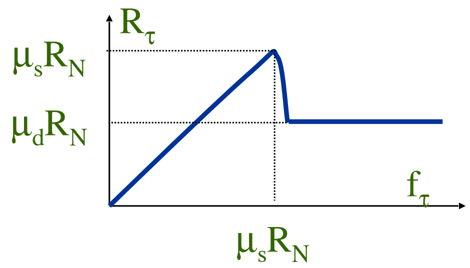
Nel caso di un gas (come l'aria) $f_R = -C\rho A v^2 \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{C\rho A}}$

(dove A è la superficie del corpo e C dipende (anche) dalla forma)

Attrito (FMUV 5.6)



Vincolo scabro: applicando una forza tangente al vincolo, il corpo non si muove finché $f_\tau \leq \mu_s R_N$, da cui si può dedurre che il vincolo deve esercitare una reazione



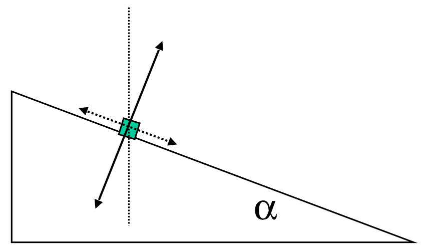
$$R_\tau = -f_\tau \leq -\mu_S R_N = -\mu_S mg$$

Il o III principio?

Durante il movimento, attrito dinamico: $R_\tau = -f_\tau = -\mu_d R_N$

$\mu_d < \mu_s \simeq 0.1$ (superfici lubrificate) - 1 (gomma)

Motivazioni fisiche dell'attrito chimiche e/o meccaniche.



Su un piano inclinato, l'equilibrio richiede:

$R_\tau = mg\sin\alpha$, $R_N = mg\cos\alpha$, sempre con $R_\tau \leq \mu_s R_N$

Il corpo si mette in movimento se l'angolo ha un valore $\alpha \geq \alpha_{min}$ tale che:

$$mg\sin\alpha_{min} = \mu_s mg\cos\alpha_{min} \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \tan\alpha_{min}$$

che permette di determinare in modo semplice μ_s

Puro rotolamento: il punto di contatto è fermo $\rightarrow$ attrito statico

Ruolo dell'attrito nella locomozione:

piede o ruota: spinta all'indietro sulla terra, reazione contraria in avanti

Forze inerziali (o apparenti) (FMUV 5.8)

Confrontando due sistemi inerziali, si ha che $a = a' \quad \Rightarrow \quad f = f' = ma'$

Confrontando un sistema inerziale con uno non inerziale:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times v' = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_C$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_C \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = m\vec{a}' + m\vec{a}_\tau + m\vec{a}_C$$

In un sistema non inerziale $\vec{f} \neq m\vec{a}'$

Se vogliamo continuare ad usare il secondo principio anche nel riferimento non inerziale, $\vec{f}' = m\vec{a}'$

dobbiamo portare a primo membro (ossia annoverare tra le forze) gli altri termini cambiati di segno:

$$\vec{f}' = \vec{f} - m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_C = \vec{f} + \vec{f}_\tau + \vec{f}_C = m\vec{a}'$$

In un riferimento non inerziale, compaiono dunque delle forze inerziali (o forze apparenti) pari al prodotto della massa per l'accelerazione di trascinamento e quella complementare cambiate di segno.

Esempi di forze inerziali

Nel riferimento non inerziale le forze "apparenti" sono effettivamente sperimentabili e misurabili staticamente:

Caso del rallentamento (A negativa) di un treno o un veicolo:

se non sono vincolato, sono spinto (trascinato) in avanti (f_τ positiva)

se mi tengo ad un vincolo (p. es. cintura di sicurezza, con forza diretta all'indietro, ossia negativa), rimango fermo (la forza del vincolo si oppone alla forza inerziale)

- l'analisi del fenomeno può essere condotta quantitativamente con una molla (dinamometro) o con un pendolo, interpretandolo sia nel riferimento accelerato, sia in quello fisso.

nel caso del pendolo, si vede chiaramente che nel veicolo accelerato si manifesta una "gravità efficace" non verticale

Moto su una piattaforma girevole:

sono spinto verso l'esterno (forza centrifuga)

se mi tengo ad un vincolo (forza centripeta, che bilancia esattamente la forza centrifuga) rimango fermo. In questo caso la forza centripeta (reale e quindi presente in entrambi i riferimenti) è proprio quella richiesta per il moto circolare uniforme nel riferimento inerziale

- Che succede nel momento in cui si rimuove il vincolo? (lancio del martello)

Condizione per l'orbita circolare di un satellite:

$$m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = G\frac{M_T}{r^2}m \;\Rightarrow\; \frac{r^3}{T^2} = \text{costante}$$ (terza legge di Keplero)