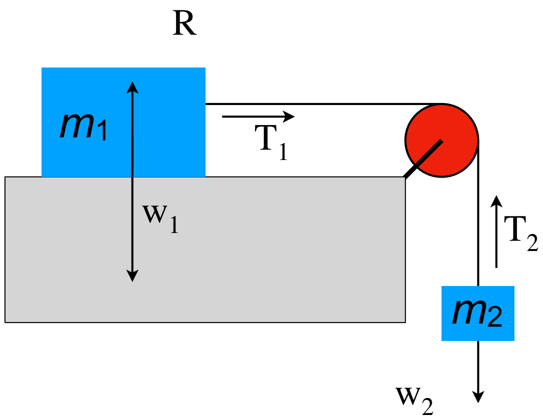
Carrucole (FMUV 5.2)

La carrucola (ideale, se priva di attrito e di massa trascurabile) è una macchina semplice, che cambia la direzione di una forza.



Usiamo un'ascissa curvilinea lungo il filo, diretta da m_1 a m_2.

Se il filo è inestensibile le velocità e le accelerazioni dei due corpi sono le stesse.

$$T_1 = -T_2; \quad w_1 = m_1 g = -R; \quad w_2 = m_2 g$$

forza su 1 (positiva): $T_1 = m_1 a$

forza su 2: $m_2 g - |T_2| = m_2 g - T_1 = m_2 a$

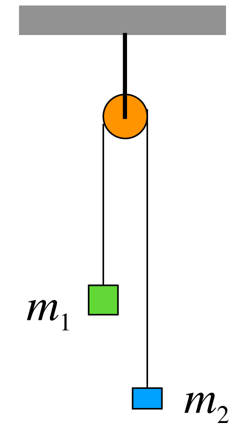
e sostituendo: $m_2 g - m_1 a = m_2 a \quad \Rightarrow \quad a(m_1 + m_2) = m_2 g \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

La forza che muove il sistema è dovuta al peso della sola massa m_2.

Tramite la fune e la carrucola, l'azione del peso è trasmessa anche alla massa m_1.

L'accelerazione complessiva a è minore di g, perché la forza peso dovuta ad m_2 agisce sulla somma delle masse $m_1 + m_2$

Altre forze costanti (FMUV 5.2)



Macchina di Atwood

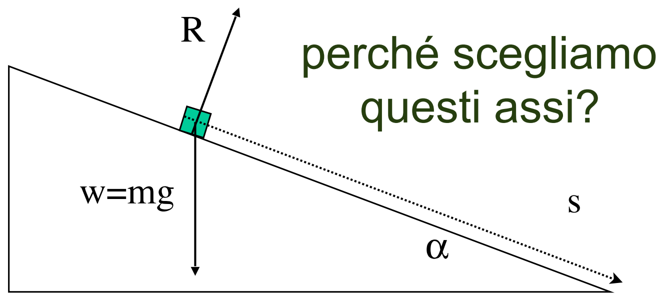
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

se $m_2 \simeq m_1 \quad \Rightarrow \quad a \ll g$

demoltiplicatore dell'accelerazione di gravità

Piano inclinato $\quad \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = m\ddot{s} \\ R - mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = g\sin\alpha$$

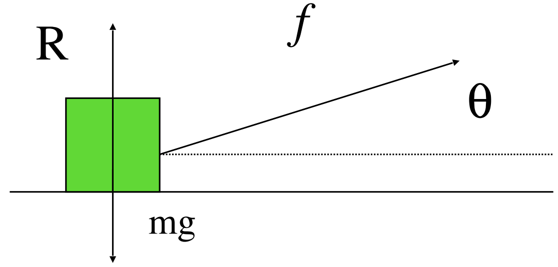


perché scegliamo questi assi?

altro demoltiplicatore di g (inventato da Galilei)

Fune obliqua $\quad f_x = f\cos\theta = m\ddot{x}$

$$R - mg + f\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R = mg - f\sin\theta$$



Che succede quando R < 0?

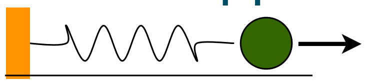
La reazione vincolare può essere arbitrariamente grande, ma in un solo verso (vincolo unilaterale)

Forze elastiche e molle (FMUV 5.3)

Molla ideale: molla di massa trascurabile, di lunghezza a riposo l_0, per la quale vale la legge di Hooke: $\vec{f} = -k(l - l_0)\hat{x} = -k\vec{x}$

k è detta costante elastica della molla e ne quantifica la "rigidità".

Forza di richiamo: la forza è negativa se la molla è più lunga della sua lunghezza a riposo, è positiva se la molla è compressa.

Per allungare la molla, si deve applicare una forza esterna; in condizioni statiche:  $f_{est} - kx = 0 \;\Rightarrow f_{est} = kx$

La forza è esercitata da entrambi gli estremi della molla: se un estremo è vincolato, la forza da esso esercitata sul vincolo non gioca alcun ruolo, ma è sempre presente.

Applicando il secondo principio ad una massa soggetta alla forza della molla si ha $f = ma \quad \Rightarrow \quad -kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + (k/m)x = 0$

che ha per soluzione un moto armonico, ossia una qualunque funzione sinusoidale, per esempio

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

dove $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Condizioni iniziali:

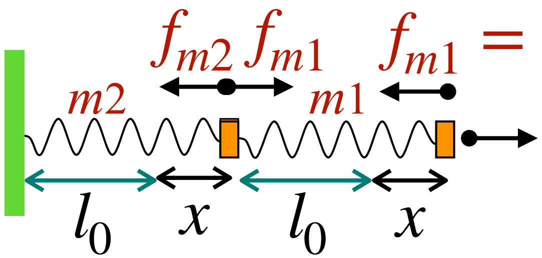
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \varphi_0 = \arctan\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$$

Se $v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = A, \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0\cos(\omega t)$

Se invece $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = v_0/\omega, \quad \varphi = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0/\omega\,\sin(\omega t)$

Molle in serie e in parallelo

Se deformiamo due molle identiche "in serie", otteniamo la stessa forza con uno spostamento doppio. Consideriamo la situazione di equilibrio:



$$f_{m1} = -kx$$

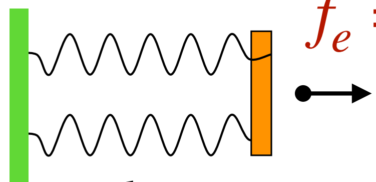
$$f_e = -f_{m1} = kx$$

$$f_e = k_{totale}x' = k_{totale}2x$$

le due molle in serie equivalgono ad un'unica molla con $k_{totale} = k/2$

Se deformiamo due molle "in parallelo", otteniamo una forza doppia a parità di spostamento:

$$f = -kx$$



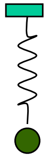
$$f = -kx$$

$$f_e = -2f = 2kx = k_{totale}x$$

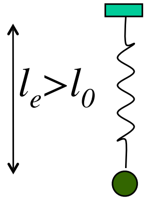
$$\Rightarrow \quad k_{totale} = 2k$$

Molle verticali

molla a riposo



appendiamo una massa



nuova posizione di equilibrio

Per l'equilibrio deve essere: $mg - k(l_e - l_0) = 0 \quad \Rightarrow mg = k(l_e - l_0)$

Per posizioni diverse da quella di equilibrio, la forza risultante sulla massa è la somma algebrica della forza peso e la forza di richiamo della molla:

$$f = mg - k(l - l_0) = k(l_e - l_0) - k(l - l_0) = -\,k(l - l_e)$$

Nell'ultima espressione scompaiono sia g che l_0. L'effetto della forza peso è quindi esclusivamente quello di spostare la posizione di equilibrio: è come se il corpo fosse soggetto solo ad una molla con la stessa costante elastica ma di lunghezza a riposo l_e.

Se x rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio, che è l_0 per molle orizzontali e l_e per molle verticali, la legge del moto rimane dunque la stessa, $-kx = m\ddot{x}$, comunque sia disposta la molla (anche su un piano inclinato…).