Dalla settimana prossima si torna all'orario con inizio alle 14:15

Def X, Y sp. normati

$T: X \to Y$ si dice un **isomorfismo** se:

1) T lineare continua
2) T è biettiva
3) T^{-1} lineare e continua.

ovvio

Un caso ben più forte è quello di un'isometria cioè un'applicazione lineare e biettiva che mantiene le norme.

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

Di fatto, se X e Y sono isometrici, allora (modulo un cambiamento di nome) sono lo stesso spazio.

In uno spazio vettoriale X due norme $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ si dicono equivalenti se vale una delle seguenti tre affermazioni (equivalenti):

i) $\exists$ costanti $c_1, c_2 > 0$ t.c.

$$c_1 \|x\| \leq |||x||| \leq c_2 \|x\| \quad \forall x \in X.$$

ii) le topologie indotte dalle due norme coincidono.

iii) l'identità è un isomorfismo tra $(X, \|\cdot\|)$ e $(X, |||\cdot|||)$

<u>Dim</u> esercizio, Kesavan.

TEOREMA Sia X uno spazio normato di dim. finita pari a N. Allora X è isomorfo a $\mathbb{R}^N$, dotato della norma

$$\|\underline{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right]^{1/2}.$$

Dim. Sia $\underline{e}_1, \dots \underline{e}_N$ la base standard di $\mathbb{R}^N$.

$$\underline{e}_i = (0, 0, \dots 0, \underset{\uparrow i}{1}, \dots 0)$$

Sia $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_N$ una base di X.

Quindi ogni $\underline{x} \in X$ si scrive in modo unico come

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \underline{v}_i$$

Definiamo $T: \mathbb{R}^N \longrightarrow X$

$$\underset{\underset{(x_1, \dots x_N)}{\parallel}}{\underline{x}} \longmapsto T\underline{x} = \underline{v} = \sum_{i=1}^{N} x_i \underline{v}_i$$

- T è lineare, e biettiva
- T è continua.

$$\|T\underline{x}\|_X \le \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, \|\underline{v}_i\|_X \overset{\text{Hölder}}{\le}$$

$$\le \left[\sum_i |x_i|^2\right]^{1/2} \underbrace{\left[\sum_i \|v_i\|_X^2\right]^{1/2}}_{\overset{\parallel}{C}} =$$

$$= C \, \|\underline{x}\|$$

Resta solo da provare che T^{-1} è continua

Supponiamo di NO. Deve esistere una successione $\{\underline{y}_n\} \subset X$ t.c. $\underline{y}_n \to \underline{0}$ in X

ma $T^{-1}(y_n) \not\to 0$, quindi estraendo una sottosucc.^{ne}, posso supporre $\|T^{-1}(y_n)\|_{\mathbb{R}^N} \geq \varepsilon > 0$

Poniamo $$\underline{z}_n = \frac{y_n}{\|T^{-1}(y_n)\|_{\mathbb{R}^N}} \in X$$

$$\underline{z}_n \to \underline{0}$$

Considero $T^{-1}(z_n) \in \mathbb{R}^N$.

$$\|T^{-1}(z_n)\| = \frac{\|T^{-1}(y_n)\|}{\|T^{-1}(y_n)\|} = 1.$$

$T^{-1}(z_n) \in \overline{B_1}$ compatto in $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ Estraggo una ulteriore sottosucc. conv.

$$T^{-1}(\underline{z}_n) \to \underline{x} \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

norma 1 $\implies \|\underline{x}\| = 1.$

applico T (continua)

$$z_n \to T\underline{x} \Rightarrow T\underline{x} = \underline{0}$$

$z_n \to 0$ $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ $\lightning$

$\square$

COROLLARIO 1 Due spazi normati di dim N sono tra loro isomorfi (basta passare per $\mathbb{R}^N$)

COROLLARIO 2 Se X è di dim. finita, tutte le norme su X sono tra loro equivalenti.

COROLLARIO 3 Se X è di dim finita, ogni $T: X \to Y$ lineare è anche continua

OSS

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |f(x)| \qquad \text{def.}$$

$$\|x\|_X = \underset{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \le 1}}{\cancel{\sup}^{\,\max}} |f(x)| \qquad \text{teorema}$$

OSS se $x, y \in X$, se $x \neq y$, allora $\exists f \in X^*$ t.c. $f(x) \neq f(y)$

Basta prendere $x - y \neq 0$. e applicare il corollario 1 del teor. di Hahn (2^a vers. analitica)

X sp. normato $\longrightarrow$ $\underset{\text{duale}}{X^*}$ sp. Banach $\longrightarrow$ $(X^*)^* = X^{**}$
biduale
sp. di Banach.

C'è una maniera semplice di costruire elementi del biduale

Fissato $x \in X$, definiamo

$$J_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(x)$$

- J_x lineare

$$J_x(\alpha f + \beta g) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha J_x(f) + \beta J_x(g)$$

- J_x continua.

$$\|J_x\|_{X^{**}} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \le 1}} |\underbrace{J_x f}_{f(x)}| =$$

$$= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_* \le 1}} |f(x)| \overset{\text{cor.}}{=} \|x\|_X$$

iniezione canonica

L'applicazione $J: x \longmapsto J_x$ mantiene la norma
$$X \longrightarrow X^{**}$$

<u>**Domanda**</u>: è suriettiva?

Se lo è, allora X e X^{**} sono isometrici,
quindi si possono identificare.
Lo spazio X si dice riflessivo.

Esempio di spazio riflessivo.

$L^p(0,1)$ (va bene anche $L^p(X, d\mu)$).

$1 < p < +\infty$.

$(L^p(0,1))^*$ si identifica con $L^{p'}(0,1)$

dove $p' = \frac{p}{p-1}$. coniugato di Hölder.

$\Rightarrow (L^p(0,1))^{**}$ si identifica con $L^{(p')'}(0,1) =$

$= L^p(0,1)$.

$L^1(0,1)$ e $L^\infty(0,1)$ non sono riflessivi.

$(L^1(0,1))^* = L^\infty(0,1)$

$(L^\infty(0,1))^* \supset L^1(0,1)$ vedere dim. dell'inclusione stretta

X spazio normato.

DEF Un **iperpiano (affine)** è un insieme della forma

$$[f=\alpha] = \{ x \in X : f(x) = \alpha \}$$

dove $f : X \to \mathbb{R}$ lineare (continuo o no e non identicam. nullo.)

$\alpha \in \mathbb{R}$

PROP

Un iperpiano $[f=\alpha]$ è chiuso $\iff$ f continuo

DIM $\boxed{\Leftarrow}$ ovvio

$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo $[f=\alpha]$ sia chiuso.

Sia $x_0 \in [f=\alpha]^c$ aperto. Supponiamo $f(x_0)<\alpha$.

Poiché $[f=\alpha]^c$ è aperto, $\exists$ una palla $B_{2r}(x_0) \subset$

$\subset [f=\alpha]^c$.

OSS deve essere $f(x) < \alpha \quad \forall x \in B_{2r}(x_0)$.

Se infatti fosse $f(x) > \alpha$ per un $x \in B_{2r}(x_0)$

allora considero il segmento di estremi x, x_0.

(tutto contenuto in $B_{2r}(x_0)$).

La restrizione di f al segmento è continua per linearità. $\Rightarrow$ esisterebbe un $\tilde{x} \in B_{2r}(x_0)$

t.c. $f(\tilde{x}) = \alpha$ assurdo.

pto generico del segmento $\quad t\,x + (1-t)\,x_0 \quad t \in [0,1]$

$$\varphi(t) = f(t\,x + (1-t)\,x_0) = t\,f(x) + (1-t)\,f(x_0)$$

$\varphi(0) < \alpha \quad , \varphi(1) > \alpha \Rightarrow \exists\, \xi \in (0,1)$ t.c.

$\varphi(\xi) = \alpha$.

Sia ora $\|z\| \leq 1$.

$$f(x_0 + r z) < \alpha \qquad \forall z \in X \text{ t.c. } \|z\| \leq 1.$$

$$f(x_0) + r\,f(z) < \alpha$$

$$f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$$

Prendendo $z \to -z$

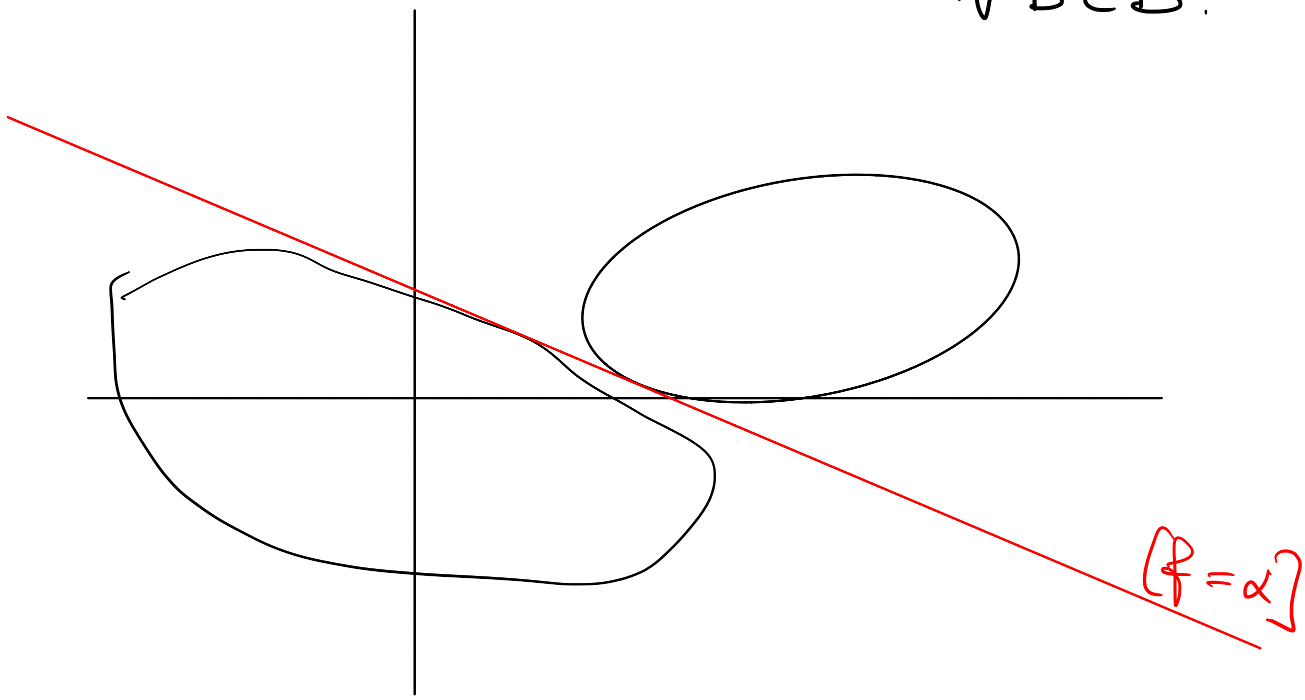
$-f(z) <$ idem.

$$|f(z)| < \frac{\alpha - f(x_0)}{r} \qquad \forall z \in B$$

$\Rightarrow$ f continuo.

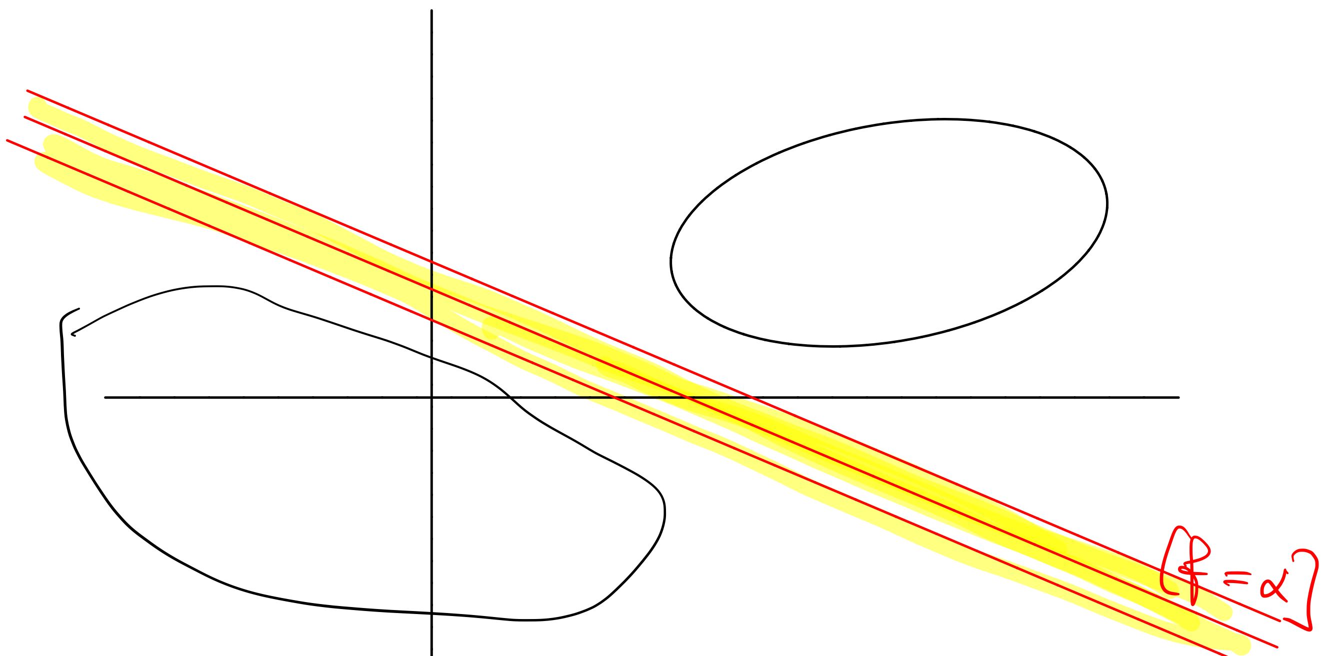
Siano $A, B \subset X$. Diremo che un iperpiano $[f=\alpha]$ separa A e B se

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B.$$



Diremo che $[f=\alpha]$ separa strettamente A e B se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

$$f(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$



Def. X sp. normato

Sia C un convesso (cioè: $\forall x,y \in C$, $\forall t\in[0,1]$
$\Rightarrow tx+(1-t)y \in C$).

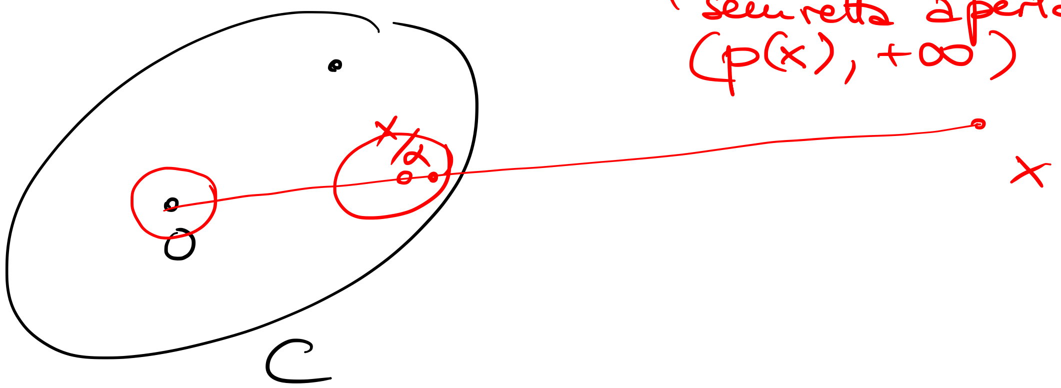
C aperto contenente 0.

Definiamo il funzionale di Minkowski di C

$$p : X \longrightarrow [0,+\infty)$$

$$p(x) = \inf \underbrace{\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}}_{}$$

semiretta aperta $(p(x),+\infty)$



Sia $B_\varepsilon(0)$ una palla t.c. $B_\varepsilon(0) \subset C$

Allora

$$\underbrace{\frac{x}{\|x\|}\frac{\varepsilon}{2}}_{\substack{\| \\ \frac{x}{\left(\frac{2\|x\|}{\varepsilon}\right)}}} \in C$$

$$\Longrightarrow p(x) < \frac{2\|x\|}{\varepsilon}$$

<u>OSS</u> $x \in C \implies p(x) < 1.$

$$p(x) < 1 \implies \frac{x}{1} = x \in C$$

Quindi $C = \{ x \in X : p(x) < 1 \}$

<u>OSS</u> $p(x)$ verifica le ipotesi del thm di Hahn-Banach 1ª vers. analitica:

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0$

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$$\frac{\lambda x}{\alpha} \in C \iff \frac{x}{\alpha/\lambda} \in C$$

<u>Dim 1)</u>

$$p(\lambda x) = \inf \{ \alpha > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \} =$$

$$= \inf \{ \alpha > 0 : \frac{x}{(\alpha/\lambda)} \in C \} =$$

pongo $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$

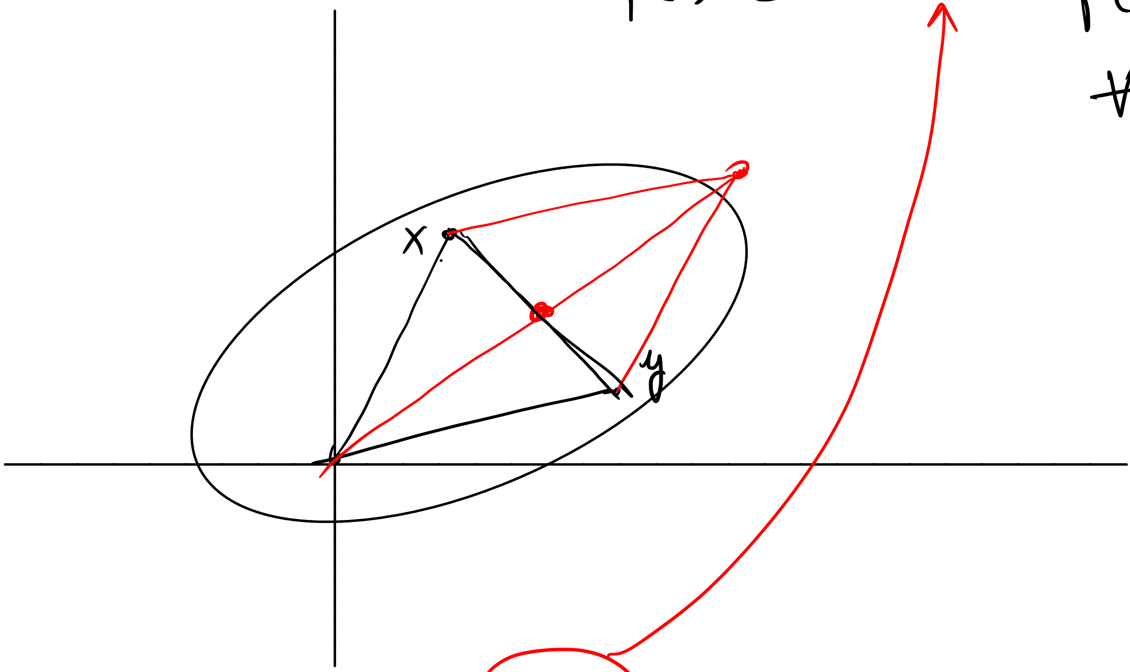
$$= \lambda \inf \{ \beta > 0 : \frac{x}{\beta} \in C \} = \lambda \, p(x) \quad \text{ok.}$$

Dim 2) $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \quad , \quad \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

C convesso $\Rightarrow$ $t \dfrac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t) \dfrac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$

$\forall t \in [0,1]$.



Vogliamo che questo punto sia proporzionale a $x+y$

Impongo $\dfrac{t}{p(x)+\varepsilon} = \dfrac{1-t}{p(y)+\varepsilon} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad t = t_0 = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$$

$$t\,(p(y)+\varepsilon) = (1-t)\,(p(x)+\varepsilon)$$

$$t\,(\,p(x)+p(y)+2\varepsilon) = p(x)+\varepsilon$$

$$1-t_0 = \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ Il punto in questione è

$$t_0 \frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t_0)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} =$$

$$= \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

$$\Rightarrow \quad p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1$$

$$\parallel$$

$$\frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

[ε arbitrario]

$$\Rightarrow \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$