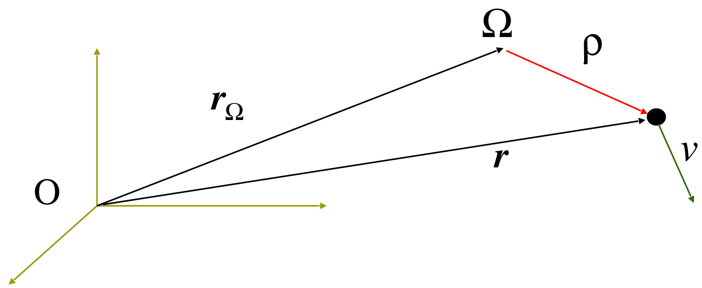
Momento di una forza e momento angolare (FMUV 4.12)

Momento di un vettore applicato rispetto a un polo:

$$\vec{\mu}_\Omega = \vec{\rho} \times \vec{v} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{v}$$



Momento di una forza:

$$\vec{m}_\Omega = \vec{\rho} \times \vec{f} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}$$

Momento angolare, o della quantità di moto, di un punto materiale:

$$\vec{p}_\Omega = \vec{\rho} \times \vec{q} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q}$$

Teorema del momento angolare:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_\Omega)}{dt} \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{q}}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{q} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} \times \vec{q} + \vec{\rho} \times \vec{f} = \cancel{\vec{v} \times \vec{q}} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q} + \vec{m}_\Omega$$

e quindi $\vec{m}_\Omega = \dfrac{d\vec{p}_\Omega}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q}$, che per $\vec{v}_\Omega = 0$ diventa

$$\vec{m}_\Omega = \frac{d\vec{p}_\Omega}{dt}, \quad \text{analogo a} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Conservazione del momento angolare

Rispetto ad un polo fisso, se $\overrightarrow{m}_{\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p}_{\Omega}$ è costante

In un sistema di riferimento inerziale, il momento angolare di un punto materiale isolato rispetto ad un polo fisso si conserva.

Tuttavia il momento della forza esterna può essere nullo anche se la forza esterna è diversa da zero. E' questo il caso di una forza che sia diretta sempre verso un punto fisso, che può essere scelto come polo: Si parla di "forza centrale":

in presenza di una forza centrale, il momento angolare rispetto al centro si conserva.

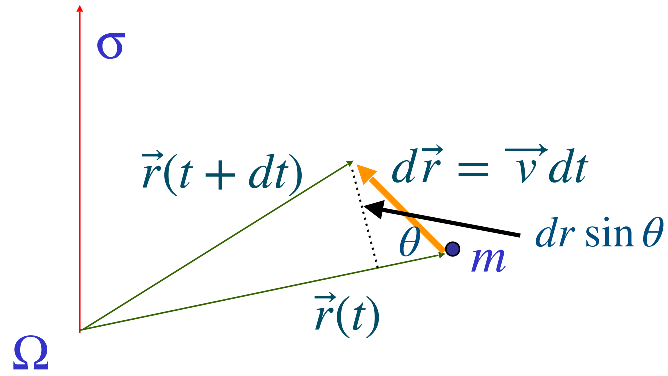
I moti centrali sono moti piani. Infatti il momento angolare è ortogonale al piano individuato dalla velocità del punto e dal vettore posizione rispetto al centro. Questo piano non può cambiare durante il moto, altrimenti il momento angolare cambierebbe direzione e dunque è il piano su cui il moto si svolge.

Nel moto circolare uniforme $\overrightarrow{p} = \vec{r} \times \overrightarrow{q} = mr^2\overrightarrow{\omega}$

il momento angolare si conserva (la forza è centripeta)

Velocità areolare

La velocità areolare $\vec{\sigma}$ ha come modulo l'area della superficie "spazzata" nell'unità di tempo dal raggio vettore ed è normale al piano del moto (è diretta come la velocità angolare e il momento angolare).



L'area dA spazzata in un tempo dt è data da

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}\,|}{2} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}\,|\,dt}{2} = \frac{|\vec{r} \times m\vec{v}\,|\,dt}{2m} = \frac{|\vec{r} \times \vec{q}\,|\,dt}{2m} = \frac{p}{2m}dt$$

e la velocità areolare è quindi:

$$\vec{\sigma} = \frac{dA}{dt}\hat{\sigma} = \frac{\vec{p}}{2m}$$

Poiché nei moti centrali il momento angolare si conserva, si conserva anche la velocità areolare.

Tensione dei fili (FMUV 5.2)

Filo inestensibile privo di massa

$$\vec{f} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m_f \vec{a}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$

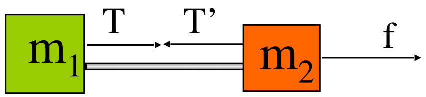
Se il filo è privo di massa, le tensioni ai suoi capi sono sempre uguali ed opposte (secondo principio)

$$\vec{f} = -\vec{T}' = \vec{T} = m\vec{a}_m$$

(terzo principio)

Il filo trasmette la forza da un capo all’altro.

Due masse connesse da un filo inestensibile privo di massa:



$$\vec{T} = m_1\vec{a}_1; \quad \vec{f} + \vec{T}' = m_2\vec{a}_2$$

le due masse hanno la stessa accelerazione, per cui sommando membro a membro e tenendo conto che $T = -T'$

$$f = (m_1 + m_2)a \qquad a = \frac{f}{m_1 + m_2} \qquad T = m_1 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} f < f$$

e se il filo ha massa?