Lo spazio $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ dei funzionali lineari e continui da X in $\mathbb{R}$ si chiama il duale di X e si indica con X^*

Esempio 1

$X = L^p(0,1)$ $\qquad (X = L^p(E,\mu))$

$1 < p < \infty$. esp. coniugato di Hölder

Sia $g(x) \in L^{p'}(0,1)$ $\qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\boxed{p' = \frac{p}{p-1}} \in (1, +\infty)$$

Rimane definito

$$F_g : X \overset{=L^p}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx .$$

Per Hölder è ben definito

$$\int_0^1 |f(x) g(x)|\, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

F_g è lineare. Inoltre è continuo, in quanto

$$|F_g(f)| \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \Rightarrow F_g \in (L^p(0,1))^*$$

$$\Rightarrow \quad \|F_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{L^{p'}}$$

Anzi, se prendo

$$f(x) = |g(x)|^{p'-2} g(x) \overset{?}{\in} L^p(0,1)$$

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 |g(x)|^{(p'-1)p} dx =$$

$$p(p'-1) = p\left(\frac{p}{p-1} - 1\right) = \frac{p}{p-1} = p'$$

$$= \int_0^1 |g(x)|^{p'} dx < \infty$$

$$\|f\|_p = \|g\|_{p'}^{p'/p} = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}$$

$$|F_g(f)| = \int_0^1 |g(x)|^{p'} dx = \|g\|_{p'}^{p'} = \underbrace{\|g\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}}_{= \|f\|_p} \|g\|_{p'}^{p' - \frac{1}{p-1}}$$

$$p' - \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} = 1$$

$$= \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Ne segue che

$$\|F_g\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{p'}.$$

In realtà tutti i funzionali di $(L^p)^*$ sono di questo tipo.

Teorema di Riesz

Sia $F \in (L^p(0,1))^*$. Allora $\exists !\, g \in L^{p'}(0,1)$

t.c. $F = F_g$, cioè

$$F(f) = \int_0^1 g(x) f(x)\, dx$$

Di fatto $(L^p(0,1))^*$ si identifica con $L^{p'}(0,1)$

Esempio 2 $\quad X = C([0,1])$ con la norma del sup.

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{lineare.}$$
$$f \longmapsto f(0)$$

continuo $\qquad |F(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_{C^0} = \max_{[0,1]} |f(x)|$

Esempio 3 $\quad$ Stesso X

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\, dx \qquad \text{lineare}$$

$$|F(f)| \leq (\text{ampiezza intervallo}) \cdot \|f\|_{C^0}$$

continuo.

$X = L^p(\mathbb{R})$ $\qquad 1 \leq p \leq \infty$.

$g \in L^1(\mathbb{R})$

Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, resta definita la convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, l'integrale ha senso per q.o. x, e $f * g \in L^p(\mathbb{R})$.,

$$T : \begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f * g \\ L^p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}) \end{array} \qquad \text{lineare}$$

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$

Esempio di F lineare <u>non continua</u>

$$X = C^1([0,1]) \quad \text{con la "norma } C^0\text{"}$$

$$\|f\| = \max_{[0,1]} |f(x)|$$

$$F: \quad C^1([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1])$$

$$f \longmapsto f'$$

lineare ok!

Non continua.

$$f_n(x) = x^n \in C^1([0,1]) \qquad \|f_n\|_{C^0} = \max_{[0,1]} x^n = 1$$

$$(Tf_n)(x) = n x^{n-1}$$

$$\|(Tf_n)\|_{C^0} = \max_{[0,1]} n x^{n-1} = n \longrightarrow +\infty.$$

Non è possibile che valga

$$\|Tf\| \leq C \|f\| \qquad \forall f \in C^1([0,1])$$

TEOREMA DI HAHN-BANACH (1ª forma analitica)

X spazio vettoriale.
Sia $p(x) : X \to \mathbb{R}$ una funzione verificante

$$p(\lambda x) = \lambda\, p(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

questa è una dis. triangolare
verrà applicata con
p norma su X.

Sia $G \subset X$ un sottosp. vettoriale di X, e sia

$g : G \to \mathbb{R}$ lineare. t.c.

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G.$$

Allora g si può estendere linearmente a tutto X rimanendo al di sotto di $p(x)$, cioè

$\exists\ \tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ lineare. t.c.

$$\tilde{g}(x) = g(x) \qquad \forall x \in G.$$

$$\tilde{g}(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X$$

LEMMA DI ZORN.

Sia E un insieme non vuoto dotato di una relazione d'ordine (parziale). Se ogni s.i totalmente ordinato di E (catena) ammette un maggiorante, allora E ammette (almeno) un elemento massimale.

DEF maggiorante di $C \subset E$ è un elemento $m \in E$ t.c.

$$m \geq x \quad \forall x \in C.$$

Un elemento massimale di E è un elemento che non è maggiorato da nessun altro elemento di E

OSS Poiché la relaz. d'ordine non è totale, l'elem. massimale potrebbe non essere unico.

DIM. thm. di Hahn - Banach

non vuota, perché contiene (G, g)

Consideriamo la famiglia E di tutte le coppie (Y, f)

t.c. Y sottospazio di X contenente G.

$$G \subset Y \subset X$$

$f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ estensione lineare di g

che verifichi $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y$.

Consideriamo su E la relaz. d'ordine

$(Y, f) \preceq (\tilde{Y}, \tilde{f})$ se $Y \subset \tilde{Y}$, $\tilde{f}$ è un prolungamento di f.

Dobbiamo verificare che ogni catena ammette un maggiorante

Sia $Q = \{(Y_i, f_i), i \in I\}$ una catena E.

Cerchiamo un maggiorante di Q.

Sia $Y = \bigcup_i Y_i$. (oss. unione di sottosp. è sottosp)

$$f(x) = f_i(x) \qquad \text{se} \quad x \in Y_i$$

La f è ben definita (non dipende dalla scelta di i)

è lineare e verifica $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y$.

Inoltre $(Y, f) \succeq (Y_i, f_i) \quad \forall i \in I$

è un maggiorante $\Rightarrow$ si applica Zorn.

$\Rightarrow \exists$ (almeno) un elemento massimale di $\mathcal{D}$

$\tilde{g}: Z \to \mathbb{R}$ $\qquad Z$ sottosp. di X.

Dobbiamo solo verificare che $Z = X$.

Supponiamo $Z \subset X$, $Z \neq X$.

$\Rightarrow \exists\ x_0 \in X \setminus Z$. Mostrerò che in tal caso posso ulteriormente estendere $\tilde{g}$, contraddicendo la massimalità.

$$Y = \text{span}(Z, x_0) = \underset{\in Z}{z} + \underset{\in \mathbb{R}}{t} x_0$$

Poniamo $h(z + t x_0) = \tilde{g}(z) + t\alpha$

con α da fissare

h lineare, devo solo verificare che $h(x) \leq p(x)$ $\forall x \in Y$

cioè $h(z + t x_0) \leq p(z + t x_0)$ $\forall z \in Z$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Se $t > 0$

$$\tilde{g}(z) + t\alpha \leq p(z + t x_0)$$

divido per t e sfrutto la "linearità" risp. alla molt. di p.

$$\tilde{g}\left(\frac{z}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{z}{t} + x_0\right)$$

$\frac{z}{t} \to z$

$$\tilde{g}(z) + \alpha \leq p(z + x_0) \quad \forall z \in Z$$

Ora prendo $t < 0$.

$$\tilde{g}(z) + \alpha t \leq p(z + t x_0)$$ divido per $-t > 0$

$$\tilde{g}\left(\frac{z}{-t}\right) - \alpha \leq p\left(\underbrace{\frac{z}{-t}}_{z} - x_0\right)$$

$$\tilde{g}(z) - \alpha \leq p(z - x_0) \qquad \forall z \in Z$$

$$\tilde{g}(z) + \alpha \leq p(z + x_0) \qquad \forall z \in Z$$

$$\leq \alpha \leq \inf_{z} \{ p(z + x_0) - \tilde{g}(z) \}$$

$$\sup \{ \tilde{g}(z) - p(z - x_0) \}$$

Proviamo che il sup è $\leq$ inf, cioè che

$$\forall z, \tilde{z} \in Z$$

$$\tilde{g}(z) - p(z - x_0) \leq p(\tilde{z} + x_0) - \tilde{g}(\tilde{z}).$$

Infatti

$$\tilde{g}(z) + \tilde{g}(\tilde{z}) = \tilde{g}(z + \tilde{z}) \leq p(z + \tilde{z}) =$$

$$= p((\tilde{z} + x_0) + (z - x_0)) \leq$$

$$\leq p(\tilde{z} + x_0) + p(z - x_0)$$

$\square$

TEOREMA di HAHN-BANACH (2ª forma analitica)

Sia X uno sp. normato (su $\mathbb{R}$).
Sia V un sottosp. di X, e sia $g : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo su V. (cioè $g \in V^*$)
Allora g si può estendere a un funzionale lineare e continuo $\tilde{g}$ su tutto X (cioè $\tilde{g} \in X^*$), conservando la stessa norma, cioè

$$\|\tilde{g}\|_{X^*} = \|g\|_{V^*}$$

<u>DIM</u> Basta applicare il tm. precedente con

$$p(x) = \|g\|_{V^*} \|x\|.$$

$p(x)$ verifica le ipotesi del tm. precedente

$$g(x) \le |g x| \le \|g\|_{V^*} \|x\| = p(x) \quad \forall x \in V$$

Pertanto g si estende linearmente come $\tilde{g}$ su tutto X in modo che

$$\tilde{g} x \le \|g\|_{V^*} \|x\| = p(x) \quad \forall x \in X$$

Prendendo $-x$ al posto di x, si ottiene

$-\tilde{g}(x) \le \|g\|_{V^*}\|x\|$, e quindi $|\tilde{g}(x)| \le \|g\|_{V^*}\|x\|$

$$\Rightarrow \tilde{g} \in X^*, \text{ e } \|\tilde{g}\|_{X^*} \le \|g\|_{V^*}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{g}\|_{X^*} = \|g\|_{V^*}. \qquad \square$$

COROLLARIO 1

Sia X uno sp. normato, sia $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$.
Allora $\exists f \in X^*$ t.c. $\|f\|_{X^*} = 1$, e

$$f x_0 = \|x_0\|.$$

Dim. Si prende $V = \{t x_0 : t \in \mathbb{R}\}$, e definisco

$$g(t x_0) = t \|x_0\| \quad \text{lineare}$$

continuo

$$|g(t x_0)| = |t| \, \|x_0\| = \|t x_0\|$$

con norma (in X^*) pari a 1

Si estende a X^* mantenendo la norma.

COROLLARIO 2

Sia X sp. normato. Allora

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} = 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} = 1}} f(x).$$