Martedì 5 e martedì 12 marzo

Lezione 14:30 precise $\longrightarrow$ 16:20

Esempi di spazi normati e di Banach

$$\ell^p = \left\{ \underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < \infty \right\} \qquad 1 \le p < \infty$$

è uno di sp. di Banach con la norma

$$\| \underline{x} \|_p = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right]^{1/p}$$

$$\ell^\infty = \left\{ \underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} : |x_i| \le c \ \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\| \underline{x} \|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \qquad \text{è di Banach.}$$

$$\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^3 \subset \dots \ell^\infty .$$

$c = \{ \underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, successioni convergenti per $i \to +\infty \}$

$c_0 = \{$ succ^{ni} infinitesimi $\}$.

$c_{00} = \{$ succ^{ni} def^{te} nulle $\}$.

Sono sp. vettoriali, normati con la norma $\| \cdot \|_\infty$

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset \dots \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$$

Esercizio Provare che c con la norma ℓ^∞ è uno sp. di Banach.

Dobbiamo solo provare che c è completo.

Sia $\{\underline{x}^{(n)}\}$ una succ^ne di Cauchy in c.

$$\underline{x}^{(n)} = \{x_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \text{ t.c. } \forall n,m>N$$

$$\|\underline{x}^{(m)} - \underline{x}^{(n)}\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\| \leq \varepsilon$$

OSS $\{\underline{x}^{(n)}\}$ è di Cauchy in $\ell^\infty \Rightarrow \underline{x}^{(n)} \to \underline{x}$ in ℓ^∞

Basta solo provare che $\underline{x} \in c$, cioè $\underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

che è una succ^ne convergente per $i \to +\infty$.

Dimostriamo che $\underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una succ^ne di Cauchy.

cioè che $\forall \varepsilon>0 \ \exists K$ t.c. $\forall i,j>K$

$$|x_i - x_j| \leq \varepsilon$$

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - x_i^{(m)}| + |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| + |x_j^{(m)} - x_j|$$

$$|x_i - x_j| \leq \underbrace{\left|x_i - x_i^{(m)}\right|}_{\substack{\leq \\ \|\underline{x} - x^{(m)}\|_{\ell^\infty} \\ \leq \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\left|x_i^{(m)} - x_j^{(m)}\right|}_{\substack{\leq \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\left|x_j^{(m)} - x_j\right|}_{\substack{\leq \\ \|\underline{x}^{(m)} - \underline{x}\|_{\ell^\infty} \\ \leq \\ \frac{\varepsilon}{3}}} \leq \varepsilon$$

se m grande

se m grande

1) scelgo m in modo che

2) Fissato m, la succ^{ne} $\{x_i^{(m)}\}_i$ è di Cauchy, quindi $\exists\, k$ t.c. se $i,j > k \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_j^{(m)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

OSS In realtà bastava provare che c_0 è un sottosp. chiuso di ℓ^∞.

PROP X sp. di Banach
$V \subset X$ sottospazio vettoriale.
Allora V è di Banach se e solo se V è chiuso

c_0 è di Banach

c_{00} non è completo, perché non è chiuso.

$$\underline{x}^{(k)} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in c_{00}$$

E' di Cauchy perché converge in ℓ^∞ a

$$\underline{x} = \left\{\frac{1}{i}\right\}_{i=1,2\dots}$$

$$\underline{x} - \underline{x}^{(k)} = \{\underbrace{0, 0 \dots 0}_{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\}$$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0$$

Altri spazi normati importanti

$$C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

con la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

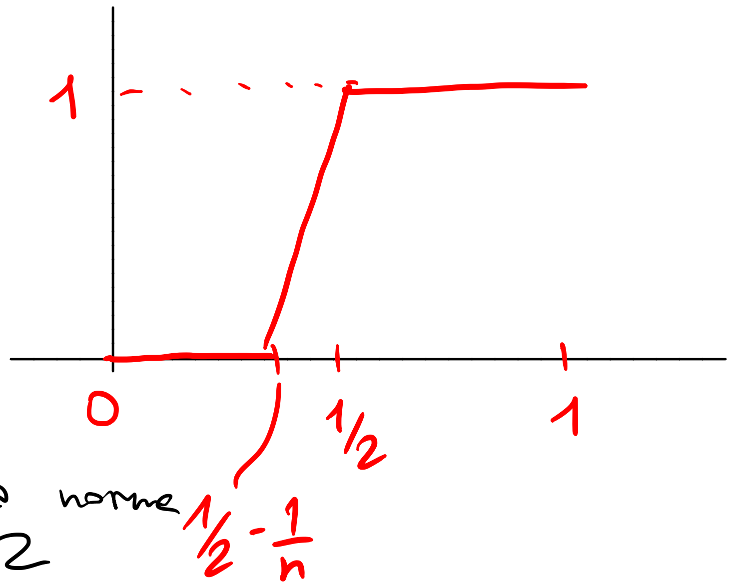
1) è una norma
2) lo spazio è di Banach.

Potrei usare altre norme su $C([0,1])$.

$$\|f\|_2 = \left[\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$ è una norma su $C([0,1])$

ma lo spazio così ottenuto non è completo.

$f_n(x) =$



è di Cauchy in $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$

non converge a nessuna funzione continua.

Il suo limite dovrebbe valere 0 per $x < \frac{1}{2}$

1 per $x > 1/2$.

$C^1([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile e con f' continua$\}$.

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$

è uno sp. di Banach

Sia $\{f_n\}$ di Cauchy in C^1 $\to$ $\{f_n\}$ di Cauchy in C_0

$\to$ $\{f_n'\}$ di Cauchy in C_0

$f_n \to f$ in C^0

$f_n' \to g$ in C^0

$f_n \to f$ in C^1

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,dt$$

$\Downarrow$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt \Rightarrow f'(x) = g(x)$$

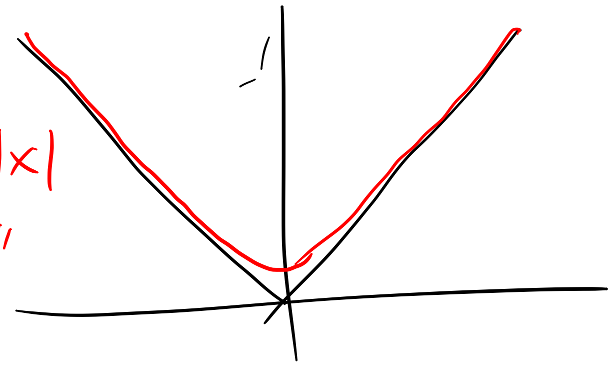
OSS se in $C^1([0,1])$ usassi solo la norma $\|f\|_{C^0} = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$

lo spazio sarebbe normato ma non completo.

Prendiamo $[-1,1]$ al posto di $[0,1]$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow |x| \text{ '' } f(x)$$

nella norma C^0.



Spazi $L^p(0,1)$

$$L^p(X, S, \mu)$$

$$1 \le p < \infty$$

$$L^p(0,1) = \Big\{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ misurabili (Lebesgue) e t.c. } \int_0^1 |f(x)|^p\,dx < \infty \Big\}$$

(dopo "identificazione" di funzioni uguali q.o.)

$$\|f\|_p = \left[\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

1) è una norma

2) è uno sp. di Banach (Thm Fischer–Riesz)

$$L^\infty(0,1) = \{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ essenz. limitate} \}$$

$$\exists\, C \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{|f(x)| \le C \quad \text{q.o. in } (0,1)}$$

$$\|f\|_\infty = \overset{\text{min}}{\cancel{\inf}} \{ C : \quad \}$$

Se l'insieme ha misura finita.

$$L^\infty(0,1) \subset L^p(0,1) \subset L^q(0,1) \subset L^1(0,1)$$

$$p > q$$

OSS X spazio normato

$$\|\cdot\| : \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ \cup\!\!\!\!\!| & & \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

è continua. Infatti $\qquad x, y \in X$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$$

$$\Downarrow$$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

$\|\cdot\|$ è continua, anzi è 1 - Lipschitz.

Se $x_n \to x$ in X

$$\Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$$

Ne segue che

$$B_R = \{x \in X \text{ t.c. } \|x\| < R\} \text{ è aperto}$$

$$\{x \in X \text{ t.c. } \|x\| \leq R\} \text{ è chiuso.}$$

Operatori lineari e continui tra sp. normati.

Siano X, Y sp. normati.

Diremo che

$$T : X \longrightarrow Y$$

è un operatore lineare e continuo da X in Y se

1) è lineare $T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(y)$
2) è continuo. (considerando le topologie indotte dalla norma).

OSS se $X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}^M$, allora ogni operatore lineare da X in Y è continuo. (in generale questo è vero se X è di dim. finita)

Scriveremo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

TEOREMA Se $T : X \to Y$ lineare, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1) T continua;
2) T è continua in 0;
3) $\exists\, K > 0$ t.c. $\|Tx\|_Y \leq K \|x\|_X \quad \forall x \in X$
4) Se $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è la palla unitaria chiusa di X, allora $T(B)$ è limitata.

3 e 4) implicano che T trasforma limitati in limitati

T si dice anche operatore lineare limitato.

TEOREMA Se $T: X \to Y$ lineare, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1) T continua;
2) T è continua in 0;
3) $\exists K>0$ t.c. $\|Tx\|_Y \le K\|x\|_X \quad \forall x \in X$
4) Se $B=\{x\in X : \|x\|\le 1\}$ è la palla unitaria chiusa di X, allora $T(B)$ è limitata.

DIM $1) \Rightarrow 2)$ ovvio

$2) \Rightarrow 1)$

Siano $x_n, x \in X$ $\quad x_n \to x$ in X $\overset{?}{\Longrightarrow} Tx_n \to Tx$

$$x_n - x \to 0 \overset{2)}{\Longrightarrow} T(x_n - x) \to T(0) = 0 \Longrightarrow$$

$$\underset{T(x_n)-T(x)}{\underbrace{T(x_n-x)}_{\shortparallel}} \to 0 \Rightarrow \underset{Tx_n}{T(x_n)} \to T(x)$$

$(2) \Rightarrow (3)$

Dalla continuità in $x=0$

Preso $\varepsilon=1$ $\exists\, \delta>0$ t.c. $\|\tilde{x}\|_X < \delta \Rightarrow \|T\tilde{x}\| < 1$

Sia $x\in X$ generico $\neq 0$. Considero $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_X}\cdot\frac{\delta}{2}$

$$\|\tilde{x}\|_X = \delta/2 < \delta \Rightarrow \|T\tilde{x}\| < 1$$

$$\|T\tilde{x}\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\frac{\delta}{2}\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|x\|_X}\|Tx\|_Y \Longrightarrow \|Tx\|_Y \le \frac{2}{\delta}\|x\|_X$$

$(3) \Rightarrow (2)$ se $\|Tx\|_Y \le K \|x\|_X \Longrightarrow$

$$\|T(x-x')\|_Y \le K \|x-x'\|_X$$

$(3) \Rightarrow (4)$ ~~⇒~~ ovvio!

$(4) \Rightarrow (3)$ se $\|\tilde{x}\| \le 1$, sappiamo che

$\|T\tilde{x}\| \le K$ per un certo K.

sia $x \in X \setminus \{0\} \Longrightarrow \tilde{x} = \dfrac{x}{\|x\|}$ ha norma 1

$$\Longrightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T(\tilde{x})\| \le K$$

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ lineari e continue}\}$

è uno sp. vettoriale.

E' uno sp. normato con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|Tx\|_Y,\ \cancel{x \in B}\ \|x\|_X \leq 1\} =$$

PROP Si ha anche

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_Y =$$

$$= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} =$$

$$= \inf\{K > 0 : \|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X \quad \forall x \in X\}$$

Dim $\to$ Kesavan.

è un minimo.

COROLLARIO

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \|x\|_X$$

Segue da

⊙

Questa appena definita è una norma su $\mathcal{L}(X,Y)$

1) $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \;\; \forall x \Rightarrow T \equiv 0$

$$\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\| \le 1} \|(T_1 + T_2)x\|_Y \le$$

$$\le \sup_{\|x\| \le 1} \left(\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y \right) \le$$

$$\le \sup_{\|x\| \le 1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\| \le 1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$$

TEOREMA X, Y sp. normati, Y di Banach

Allora $\mathcal{L}(X,Y)$ è di Banach

Dim Sia $\{T_n\}$ una succ^{ne} di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $\forall n,m > N \quad \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$

Fissiamo $x \in X$. Allora

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}} \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\{T_n x\} \text{ è di Cauchy in } Y \\ Y \text{ completo}\end{array}\right\} \Rightarrow T_n x \xrightarrow{Y} T(x)$$

$$\underbrace{T_n(\alpha x + \beta x')}_{\downarrow} = \alpha T_n x + \beta T_n x'$$

$$T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x') \Rightarrow T \text{ lineare}$$

T continuo

T_n è limitata in $\mathcal{L}(X,Y)$ perché è di Cauchy

$$\|T_n x\|_Y \leq \underbrace{\|T_n\|_{\mathcal{L}}}_{\leq C} \|x\|_X$$

continuità della norma

$$\|Tx\|_Y$$

$$\|Tx\|_Y \leq C \ \|x\|_X$$

Resta da provare che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \underbrace{\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}}}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}} \|x\|_X < \varepsilon \|x\|$$

se n, m grandi

se $x \in B$

$$\Rightarrow \quad \|T_n x - T_m x\|_Y \leq \varepsilon$$

$m \to \infty$

$$\|T_n x - T x\| < \varepsilon \qquad \forall x \in B \;\; \forall n > N$$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}} \leq \varepsilon \qquad \forall n > N$$

$$\Rightarrow \quad T_n \to T \quad \text{in } \mathcal{L}(X, Y)$$