Pagina web del corso: da aprire nei prossimi giorni
su elearning.uniroma1.it
(iscriversi)

Ricevimento studenti: Lun. 11:00 → 12:30 stanza 4.
Giov. 15:30 → 17:00

Libri di Testo:

Brezis: Functional Analysis. (Springer)

Kesavan: Functional Analysis.

Prerequisiti:

- Sp. vettoriali
- Sottosp. vettoriali
- Vettori lin. dipendenti e indipendenti
- basi
- span di un insieme di vettori
- trasf. lineari tra sp. vettoriali
- Teoria della misura e dell'integrazione (Lebesgue)
- Spazi L^p
- (Spazi di Sobolev).

Spazi metrici

X insieme

$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ distanza

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad \forall x,y \in X$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dis. triangolare.

modello: $\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{C}$ $\quad$ " $\quad$ "

$\mathbb{R}^N$ $\quad d(\underline{x},\underline{y}) = \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2 \right]^{1/2}$ $\quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)$

$\mathbb{C}^N$ $\quad$ " $\quad$ "

(X,d) si dice sp. metrico.

Dato $x \in X$, $\quad r > 0$, si definisce

intorno sferico di centro x e raggio r

$$B(x,r) = B_r(x) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$$

A partire da questo si possono definire gli aperti

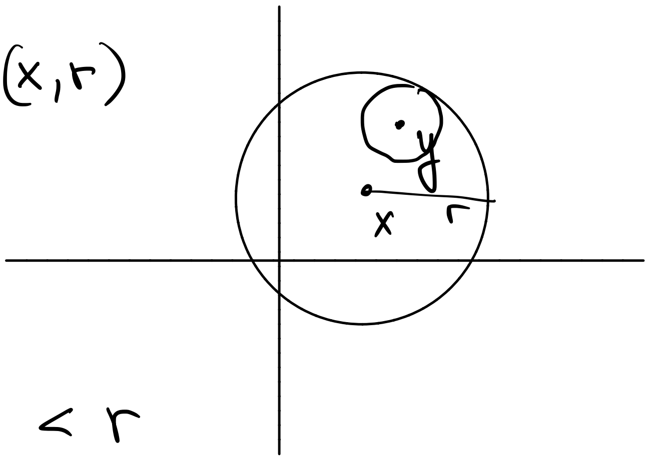
$A \subset X$ si dice aperto se

$\forall x \in A \ \exists \ B_r(x) \subset A$

<u>OSS</u> $B(x,r)$ è esso stesso aperto.

Infatti, se $y \in B(x,r)$, cioè $d(x,y) < r$.

Allora $B(y, r-\underbrace{d(x,y)}_{\rho}) \subset B(x,r)$



Sia $z \in B(y, r-\rho)$

$\Rightarrow d(z,y) < r-\rho$

$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$

dis. triang. $\quad d(x,y) = \rho \quad d(y,z) < r-\rho$

In questo modo viene definita una topologia cioè la famiglia degli aperti

1) $X, \emptyset$ sono aperti

2) L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto (ovvio!)

3) L'intersezione di una famiglia finita di aperti è un aperto.

<u>Dim</u> Basta farlo per due aperti A, A'

$A \cap A'$ è aperto sia $x \in A \cap A' \Rightarrow \exists$

$\left.\begin{array}{l} \exists \ B_r(x) \subset A \\ \exists \ B_\rho(x) \subset A' \end{array}\right| \Rightarrow B_{\min(r,\rho)}(x) \subset A \cap A'$

$C \subset X$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Limiti in uno sp. metrico.

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X
$x \in X$

Diremo che $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ se $\left(x_n \xrightarrow{n} x \right)$

$\forall$ intorno $U = B_\varepsilon(x)$ di x si ha $x_n \in U$ definitivamente per $n \to +\infty$.

cioè se $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ $x_n \in U$

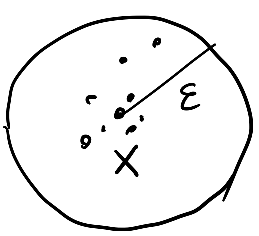
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ $d(x_n, x) < \varepsilon$

cioè se

$$\lim_{n \to +\infty} d(x, x_n) = 0$$ nel senso dei numeri reali.

CONSEGUENZA.

Se $x_n \to x$, allora la successione $\{x_n\}$ è limitata, cioè esiste una palla (per es. centrata in x) che contiene tutta la succ^{ne}.



funzioni continue (tra sp. metrici)

DEF X, Y sp. metrici

$f : X \longrightarrow Y$ si dice continua se vale una delle seguenti tre condizioni equivalenti.

1) $\forall\, V$ aperto di Y, $f^{-1}(V)$ è aperto in X

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\{x \in X \text{ t.c. } f(x) \in V\}}$

2) $\forall\, \bar{x} \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c.

se $x \in X$, $d(x, \bar{x}) < \delta \implies d\big(f(x), f(\bar{x})\big) < \varepsilon$

3) $\forall\, \bar{x} \in X$ $\forall$ succ^{ne} $\{x_n\} \subset X$ t.c. $x_n \xrightarrow{n} \bar{x}$, si ha

$f(x_n) \xrightarrow{n} f(\bar{x})$ in Y

Esercizio: dimostrare che le tre cond^{ni} sono equivalenti.

<u>DEF</u>. X sp. metrico $\{x_n\} \subset X$ si dice succ^{ne} di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ t.c. } \forall n, m > N \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Una succ^{ne} convergente in X è sempre di Cauchy (esercizio)

<u>DEFINIZIONE</u>

Uno spazio metrico X si dice <u>completo</u> se ogni succ^{ne} di Cauchy in X ammette limite in X

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$ sono completi

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^N$ non sono completi

DEF X sp. vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) su cui è data una **norma**, cioè un'applicazione

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,+\infty) \quad \text{t.c.}$$

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x,y \in X$

dis. triangolare

Esempi

$\mathbb{R}$, $|x|$

$\mathbb{C}$, $|x|$

$\mathbb{R}^N$, $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right]^{1/2}$ $p=2$.

$\mathbb{C}^N$, $\|x\| =$ - - - -

Su $\mathbb{R}^N$ potrei usare altre norme $\underline{x} = (x_1 \dots x_N)$

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

Si dimostra che sono norme, e valgono le seguenti disug. $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$

<u>Dis di Hölder</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \|\underline{x}\|_p \, \|\underline{y}\|_{p'}$$

$1 < p < \infty$

$p' =$ coniugato di p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff p' = \frac{p}{p-1}$$

$p=2 \Rightarrow p'=2$

La dis. triangolare prende il nome di dis. di Minkowski.

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p.$$

dim. di Hölder e Minkowski in $\mathbb{R}^N$ molto facile ($\longrightarrow$ Kesavan).

$$\|\underline{x}\|_\infty \overset{def}{=} \max_{i=1\dots N} |x_i|$$

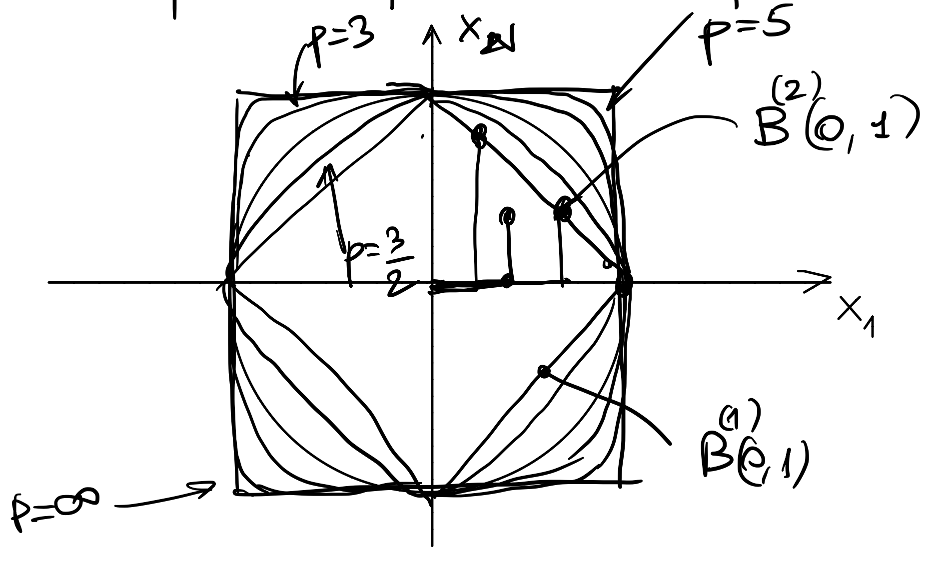
$$\infty' = 1 \qquad\qquad 1' = \infty$$

Continua a valere Hölder con $p=1$ e $p'=\infty$ (esercizio).

<u>OSS</u> $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ allora $\|\underline{x}\|_p \xrightarrow{p\to\infty} \|\underline{x}\|_\infty$

<u>Esercizio:</u> tutte le norme $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^N$ sono equivalenti, cioè, dati $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ $\exists\, c_1, c_2 > 0$ t.c.

$$c_1 \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq c_2 \|x\|_q$$



Data una norma su X sp. vettoriale, resta definita una metrica

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Uno spazio normato è uno sp. metrico.

Uno spazio normato e completo si dice **Spazio di Banach**.

In uno sp. normato si ha

$$x_n \xrightarrow{n} x \iff \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Nello sp. $\mathbb{R}^N$, dotato di una qualsiasi delle norme p indicate prima

$$\underline{x}_n \to \underline{x} \iff \|x_n - x\|_p \to 0 \qquad \overset{p<\infty}{=} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_{n,i} - x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i = 1 \dots N$$

$$x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i \quad \text{in } \mathbb{R}$$

Ne segue che $\mathbb{R}^N$ con una qualsiasi di queste norme è completo (di Banach)

$\{x_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \|\underline{x}_n - \underline{x}_m\|_p < \varepsilon$ $\quad \overset{\wedge}{|x_{n,i} - x_{m,i}|} \quad \forall i = 1 \dots N$

$\forall n, m$ abbastanza grandi

$\Rightarrow$ Le succ^{ni} $\{x_{n,i}\}_n$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\to$

$\forall i = 1 \dots N$ $x_{n,i} \xrightarrow{n} x_i$ in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_n \xrightarrow[\mathbb{R}^N]{} \underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$

Altri esempi di spazi normati

Spazi di successioni

Sia $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ successione di numeri reali.

Definiamo, per $1 \le p < \infty$

$$\ell^p = \left\{ \underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

E' uno spazio vettoriale.

se $\underline{x} = \{x_i\}$ $\underline{y} = \{y_i\} \in \ell^p \overset{?}{\Longrightarrow} \underset{\underset{\ell^p}{\cap}}{\underline{x}+\underline{y} = \{x_i + y_i\}_{i\in\mathbb{N}}}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \overset{?}{<} +\infty$$

sì, perché $|x_i + y_i|^p \le \underbrace{(|x_i| + |y_i|)^p \le 2^{p-1}(|x_i|^p + |y_i|^p)}$

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall a, b \ge 0$$

si prova facilmente dividendo per b^p e studiando una funzione di una sola variabile

Definiamo una norma in ℓ^p.

$$\|\underline{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p}$$

Si dimostra che è una norma (si usa la dis. di Minkowski per le somme <u>finite</u> e si passa al limite)

Lo spazio ℓ^p così definito è uno spazio di Banach. (normato e completo)

OSS Questo è l'ordinario spazio L^p su $(\mathbb{N}, S, \mu)$

counting measure

σ- algebra di tutti i s.i. di $\mathbb{N}$

$$\ell^\infty = \{ \underline{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ limitate} \} =$$

$$= \{ \underline{x} = \{x_i\} \text{ t.c. } |x_i| \leq c \quad \forall i \in \mathbb{N} \}.$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

Anche questo è uno spazio normato (verificare) e completo (verificare).

OSS

$$\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^3 \subset \dots \subset \ell^\infty$$

E' l'inclusione opposta rispetto a quella che c'è tra gli spazi L^p in un insieme limitato.

Se $\underline{x} = \{x_i\} \in \ell^1$, allora $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$

$$\Rightarrow |x_i| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \Rightarrow |x_i| < 1 \quad \text{def}^{te}$$

$$\Rightarrow \forall p > 1 \qquad |x_i|^p < |x_i| \quad \text{def}^{te} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

$\Rightarrow$

$\underline{x} \in \ell^1 \Rightarrow \underline{x} \in \ell^p \quad \forall p > 1.$

Altri spazi di successioni

c = successioni convergenti

c_0 = successioni infinitesime

c_{00} = successioni def^{te} nulle.

sp. vettoriali su cui uso la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ ℓ^{∞}