moti elementari (FMUV 3.11)

Le espressioni intrinseche di velocità e accelerazione:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t \,; \qquad \vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

permettono di classificare i moti in:

- moti uniformi, quelli con $\dot{s}$ (modulo della velocità) costante
- moti uniformemente accelerati, quelli con $\ddot{s}$ costante

e ancora in:

- moti rettilinei, se $\rho \to \infty$
- moti circolari, se ρ è costante

Nei moti circolari è sempre presente una accelerazione normale alla traiettoria

moti uniformi (FMUV 3.11.1)

Ricordando che $ds = vdt$ e che nel moto uniforme $v = v_0$ costante, si ha:

$$s(t) = \int ds + c = \int v_0 dt + c = v_0 \int dt + c = v_0 t + c$$

$$s(0) = c = s_0\,; \qquad s(t) = s_0 + v_0 t$$

se vogliamo usare l'integrale definito:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_0 dt = v_0(t_2 - t_1)$$

e ponendo $t_1 = 0$ e $t_2 = t$ otteniamo di nuovo $s(t) = s_0 + v_0 t$

Se il moto è rettilineo e uniforme si ha:

$\rho = \infty \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 \Rightarrow \dot{x} = v_{0x};\ x(t) = x_0 + v_{0x} t$ etc.

ossia $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$

dove $\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v}_0 \equiv (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ rappresentano le condizioni iniziali

moto rettilineo uniformemente accelerato (FMUV 3.12)

Consideriamo un moto rettilineo con accelerazione costante a.

Possiamo sempre scegliere l'asse x nella direzione del moto.

Per ottenere $x(t)$ dobbiamo integrare due volte in dt:

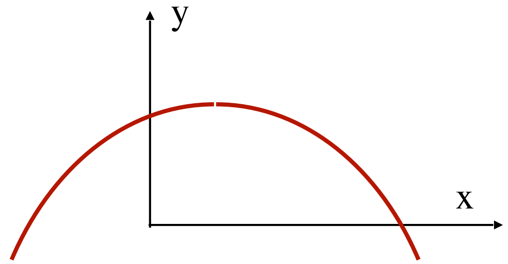
$$\frac{dv(t)}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

con due costanti di integrazione che rappresentano la velocità e la posizione all'istante iniziale.

Naturalmente le tre coordinate hanno leggi orarie indipendenti l'una dall'altra.

Per esempio, un moto con velocità costante in x, accelerazione costante in y e velocità nulla in z avrà come leggi orarie

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$
$$z(t) = z_0$$



moto circolare uniforme **(FMUV 3.13)**

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r} \equiv (x, y, 0) \equiv (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$$

dove ω rappresenta la velocità angolare, costante

$$\vec{\omega} \equiv (0,0,\omega), \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$$

si verifica immediatamente che $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 = R^2$

Derivando, si ottengono le componenti della velocità:

$$\begin{cases} v_x = -\,\omega R\sin\omega t \\ v_y = \omega R\cos\omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

di modulo $v = \omega R$

e ortogonale ad R:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = (-\omega R^2 + \omega R^2)\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

derivando ancora, si ottiene l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x = -\,\omega^2 R\cos\omega t \\ a_y = -\,\omega^2 R\sin\omega t \\ a_z = 0 \end{cases}$$

per cui

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = -\,\omega^2\vec{r}$$

$$|\vec{a}| = a = \omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$$

r, v e a sono di modulo costante e si ottengono uno dall'altro usando la relazione di Poisson (ruotano con la stessa velocità angolare)

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}; \qquad \vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v}$$

moto armonico (FMUV 3.14)

Consideriamo la proiezione del moto circolare uniforme sull'asse x,

$$x = R\cos\omega t$$

Notiamo che con altra scelta dell'istante iniziale possiamo avere $x = R\sin\omega t$

Entrambe le funzioni possono essere espresse in una forma generale:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

che rappresenta un particolare moto rettilineo, il moto armonico.

In un moto rettilineo non ha senso parlare di velocità angolare, per cui ω viene detta pulsazione e può essere espressa in termini di frequenza o di periodo del moto armonico:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Le caratteristiche di un moto armonico sono l'ampiezza A, che ha le dimensioni di una lunghezza e corrisponde al massimo spostamento (in modulo) del punto dall'origine $x = 0$, la pulsazione ω e la fase φ_0, che è determinata dalla posizione del punto $x(0)$ al tempo $t = 0$:

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi_0; \quad \varphi_0 = \arccos\frac{x_0}{A}$$