Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 12–14 luglio ◯ 20–21 luglio ◯ 24–26 luglio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}} ,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

---

2. a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx$;

b) Posto $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^{x^2}\, dx$, trovare una formula che esprima I_n $(n \geq 2)$ in funzione di I_{n-2};

c) Usare la formula trovata al punto b) per trovare I_5.

---

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel piano complesso dell'equazione
$$(1+z)^4 + z^4 = 0 .$$

---

4. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ a(x^5+1) + bx^2 & \text{se } x \geq 0 , \end{cases}$$
trovare tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (se esistono) che rendano vera (separatamente) ciascuna delle seguenti condizioni:

a) f è continua in $\mathbb{R}$;
b) f definitivamente crescente per $x \to +\infty$;
c) f ammette un flesso in $x_0 = 1$;
d) f ammette massimo relativo in $x_0 = 1$;
e) f è derivabile in $x_0 = 0$.

---

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \right)^{\alpha} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) - \frac{2}{n} \right)^{\alpha} .$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 6 punti; **4:** 8 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 12–14 luglio ◯ 20–21 luglio ◯ 24–26 luglio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x+1}} \,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

---

2. a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx\,;$

b) Posto $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^{-x^2}\, dx$, trovare una formula che esprima I_n $(n \geq 2)$ in funzione di I_{n-2};

c) Usare la formula trovata al punto b) per trovare I_5.

---

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel piano complesso dell'equazione

$$(z-1)^4 + z^4 = 0\,.$$

---

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\,(1-\cos x)}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ a(x^4+1) - bx^2 & \text{se } x \geq 0\,, \end{cases}$$

trovare tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (se esistono) che rendano vera (separatamente) ciascuna delle seguenti condizioni:

a) f è continua in $\mathbb{R}$;
b) f definitivamente crescente per $x \to +\infty$;
c) f ammette un flesso in $x_0 = 1$;
d) f ammette massimo relativo in $x_0 = 1$;
e) f è derivabile in $x_0 = 0$.

---

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{arctg} \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{arctg} \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{3}{n} \right)^{\alpha}.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 6 punti; **4:** 8 punti; **5:** 7 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}} \ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{x-1}} & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x \geq 0, \ x \neq 1. \end{cases}$$

Non ci sono simmetrie evidenti.

$f(x) > 0$ nel suo dominio.

f continua nel suo dominio.

Limiti significativi:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = (e^{+\infty}) = +\infty$ $\quad x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = (e^{-\infty}) = 0^+$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{1} = e$ $\quad y = e$ asintoto orizz. per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1}$. $\quad y = \frac{1}{e}$ " " " $x \to -\infty$

Studio derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} & \text{per } x < 0 \\ -\dfrac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} & \text{per } x > 0, \ x \neq 1. \end{cases}$$

$x=0$ è **punto angoloso**, in quanto

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 .$$

$f'(x)=0$ mai

$f'(x)>0$ per $x \in (-\infty, 0)$

$f'(x)<0$ per $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

f è **strettamente crescente** in $(-\infty, 0]$

f è **strettamente decrescente** in $[0,1)$ e in $(1,+\infty)$.

$x=0$ è **punto di massimo relativo**.

Si ha: $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$ (non richiesto ma utile per il grafico).

Studio derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{x-1}} \dfrac{3-2x}{(x-1)^4} & x<0 \\ e^{\frac{x}{x-1}} \dfrac{2x-1}{(x-1)^4} & x>0,\ x\neq 1 \end{cases}$$

$f''(x)=0$ per $x=\frac{1}{2}$

$f''(x)>0$ per $x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,+\infty)$

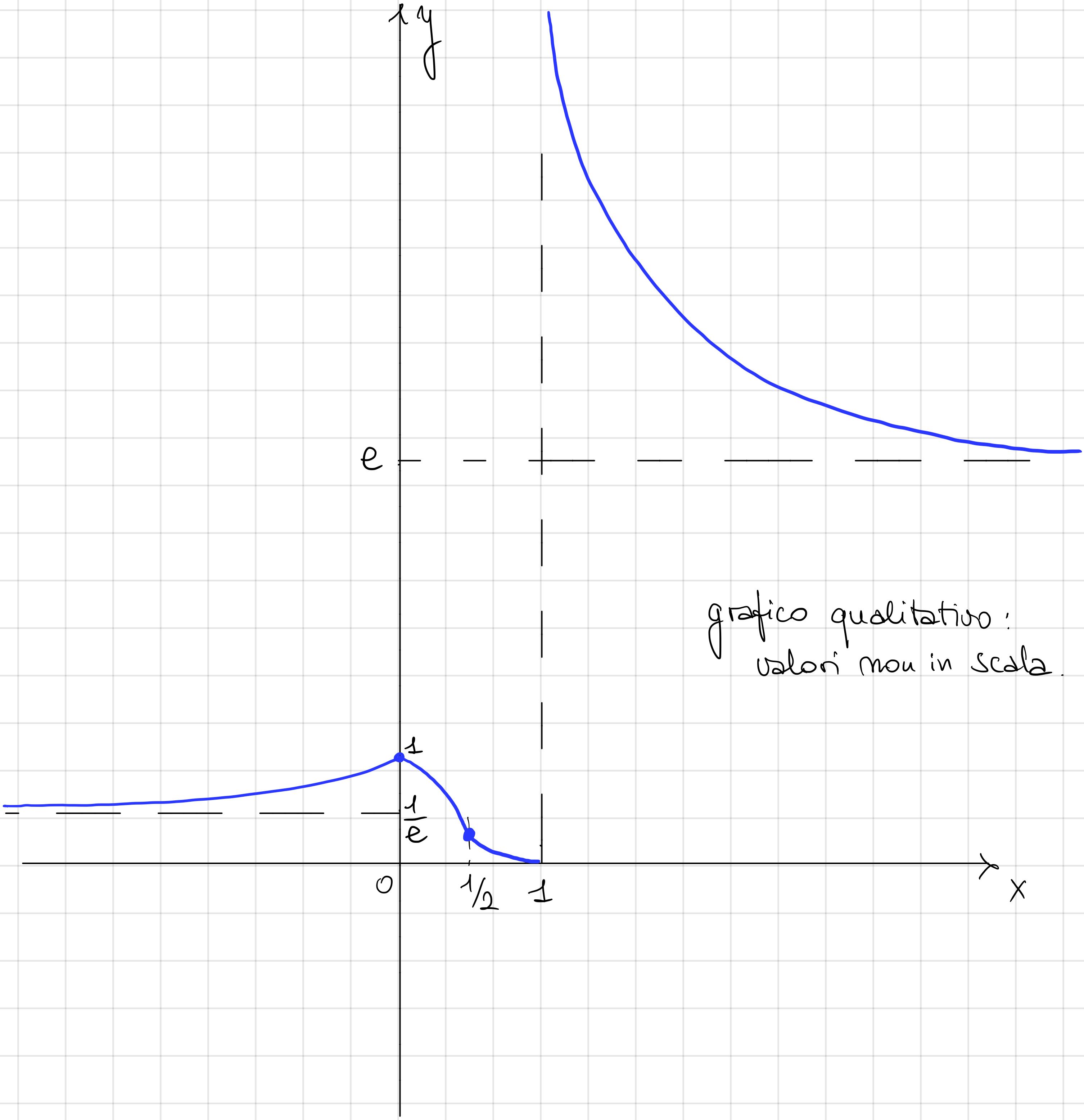
$f''(x)<0$ per $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

Quindi:

f è **strettamente convessa** in $(-\infty, 0]$, in $[\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, +\infty)$

f è **strettamente concava** in $[0, \frac{1}{2}]$

$x = \frac{1}{2}$ è **punto di flesso**.



2. a) Calcolare $\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx$;

b) Posto $I_n = \int_0^1 x^n\, e^{x^2}\, dx$, trovare una formula che esprima I_n $(n \geq 2)$ in funzione di I_{n-2};

c) Usare la formula trovata al punto b) per trovare I_5.

a) Ponendo $t = x^2$, da cui $dt = 2x\,dx$,

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{e^t}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

b) $$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1}\left(x e^{x^2}\right) dx = \text{[integrando per parti]}$$

$$= x^{n-1}\left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 - \frac{(n-1)}{2}\int_0^1 x^{n-2} e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - (n-1)\, I_{n-2}\right)$$

c) $I_1 = \frac{e-1}{2}$ (per il punto a)

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(e - 2 I_1\right) = \frac{1}{2}\left(e - e + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}\left(e - 4 I_3\right) = \frac{1}{2}(e-2)$$

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel piano complesso dell'equazione

$$(1+z)^4 + z^4 = 0\,.$$

Dividiamo per z^4 ($z=0$ non è soluzione):

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^4 = -1.$$

Ponendo $W = \dfrac{1+z}{z}$, diventa $W^4 = -1$.

Dobbiamo trovare le radici quarte di $-1 = e^{i\pi}$

$$W_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Poi risolvo $1 + z = Wz \iff z = \dfrac{1}{W-1}$

$$k=0 \Rightarrow W_0 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Rightarrow$$

$$z_0 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) - 1} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+i} = \frac{(1-\sqrt{2}-i)}{2(\sqrt{2}-1)} = -\frac{1+i(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow W_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \Longrightarrow$$

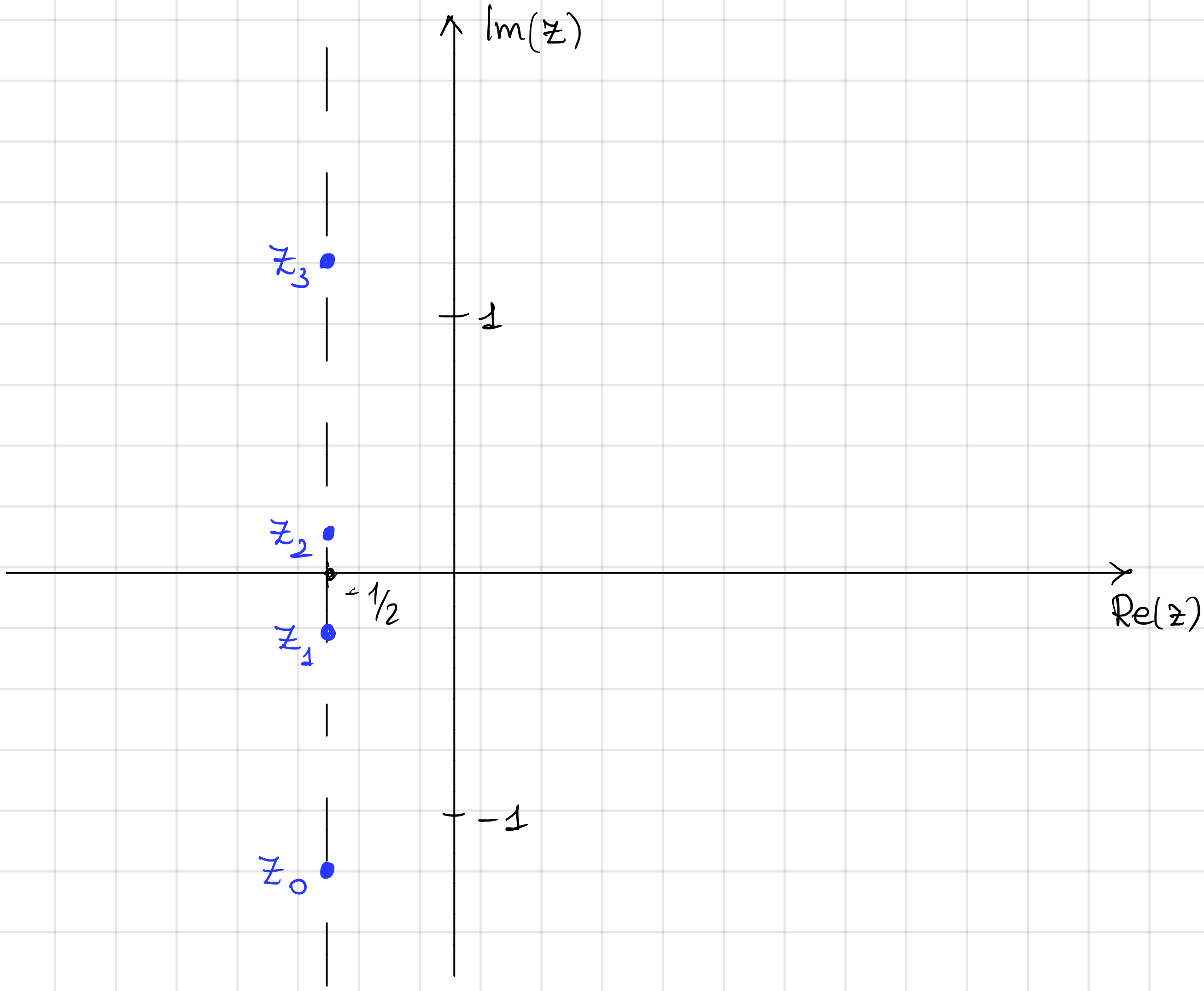
$$\Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}+i} = -\frac{1+i(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$k=2 \Rightarrow W_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{-1+i(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$k=3 \Rightarrow W_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-i} = \frac{-1+i(\sqrt{2}+1)}{2}$$



Im(z)
Re(z)
1
-1
-1/2
z3
z2
z1
z0

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ a(x^5+1) + bx^2 & \text{se } x \geq 0\,, \end{cases}$$

trovare tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (se esistono) che rendano vera (separatamente) ciascuna delle seguenti condizioni:

a) f è continua in $\mathbb{R}$;
b) f definitivamente crescente per $x \to +\infty$;
c) f ammette un flesso in $x_0 = 1$;
d) f ammette massimo relativo in $x_0 = 1$;
e) f è derivabile in $x_0 = 0$.

a) L'unico problema è la continuità da sinistra in $x_0 = 0$.

$f(0) = a$;

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 2;$$

Pertanto f è continua se e solo se $a = 2$ (b qualsiasi).

b) Per $x > 0$ si ha $f'(x) = 5ax^4 + 2bx$. Esaminando il segno di f' per x tendente a $+\infty$, si vede che la f è crescente definitivamente per $x \to +\infty$ solo in questi casi:

$a > 0$, b qualsiasi, oppure

$a = 0$, $b \geq 0$

c) $f''(x) = 20ax^3 + 2b$. Affinché f ammetta un flesso per $x_0 = 1$, deve essere $f''(1) = 20a + 2b = 0$.

Ma questo non basta. Controlliamo se $f'''(1) \neq 0$.

$f'''(x) = 60ax^2$, $f'''(1) = 60a$.

Quindi se $a \neq 0$, $b = -10a$, il pto $x_0 = 1$ è un flesso.
Se poi $a = b = 0$, allora $f \equiv 0$, quindi $x_0 = 1$ non può essere considerato un flesso (ma dipende dai testi)

Risposta: $(a \neq 0)$, $b = -10a$

d) Deve essere $f'(1) = 5a + 2b = 0$.

Questo non basta, vediamo il segno di $f''(1)$

$f''(1) = 20a + 2b$

Quindi se
$$\begin{cases} b = -\frac{5}{2}a \\ 20a + 2b < 0, \end{cases}$$
allora $x_0 = 1$ è pto di max. Questo corrisponde a
$$b = -\frac{5}{2}a, \quad a < 0.$$

Se invece $b = -\frac{5}{2}a$, $a = 0 \Rightarrow a = b = 0$, allora f è costante, quindi $x_0 = 1$ è ancora punto di massimo relativo.

Risposta: $b = -\frac{5}{2}a, \quad a \leq 0$.

e) Per essere derivabile, f deve in primo luogo essere continua. Quindi (punto a) $a = 2$.

Inoltre f è sicuramente derivabile da destra nello zero, e
$$f'_+(0) = (5ax^4 + 2bx)\Big|_{x=0} = 0$$

Invece $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)}{x^2}$

Poiché, per $t \to 0$,
$$t\cos t - \operatorname{sen} t = t\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right) =$$
$$= -\frac{t^3}{3} + o(t^4) \sim -\frac{t^3}{3},$$
si ha
$$2x\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) \sim -\frac{8}{3}x^3,$$
e quindi

$f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$. Ne segue che f è derivabile in 0 se e solo se $a = 2$ (b qualsiasi).

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\right)^{\alpha},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)-\frac{2}{n}\right)^{\alpha}.$$

a) La serie è a termini positivi.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n}+\frac{3}{n^2} \sim \frac{2}{n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^\alpha}$,

quindi converge se e solo se $\alpha > 1$

b) Utilizzando lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) - \frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{n} =$$

$$= \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n^2}$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$,

quindi converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x+1}} \ ,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{x+1}} & \text{se } x<0,\ x\neq -1 \\ e^{\frac{x}{x+1}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Non ci sono simmetrie evidenti.

$f(x) > 0$ nel suo dominio.

f continua nel suo dominio.

Limiti significativi:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = (e^{-\infty}) = 0^+$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = (e^{+\infty}) = +\infty \qquad x=-1 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = e^1 = e \qquad y=e \text{ asintoto orizz. per } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = e^{-1} \qquad y = \frac{1}{e} \quad \text{" \quad " \quad "} \quad x \to -\infty$$

Studio derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} & \text{per } x<0,\ x\neq -1 \\ \dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} & \text{per } x>0. \end{cases}$$

$x = 0$ è **punto angoloso**, in quanto

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +1.$$

$f'(x) = 0$ mai

$f'(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

f è **strettamente crescente** in $[0, +\infty)$

f è **strettamente decrescente** in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 0]$

$x = 0$ è **punto di minimo relativo**.

Si ha: $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$ (non richiesto ma utile per il grafico).

Studio derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{(x+1)^4} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < 0, \ x \neq -1 \\[2ex] -\dfrac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} & x > 0 \end{cases}$$

$f''(x) = 0$ per $x = -\frac{3}{2}$

$f''(x) > 0$ per $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0)$

$f''(x) < 0$ per $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

Quindi:

f è **strettamente convessa** in $\left[-\frac{3}{2}, -1\right)$ e in $(-1, 0]$

f è **strettamente concava** in $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ e in $[0, +\infty)$

$x = -\frac{3}{2}$ è punto di flesso.

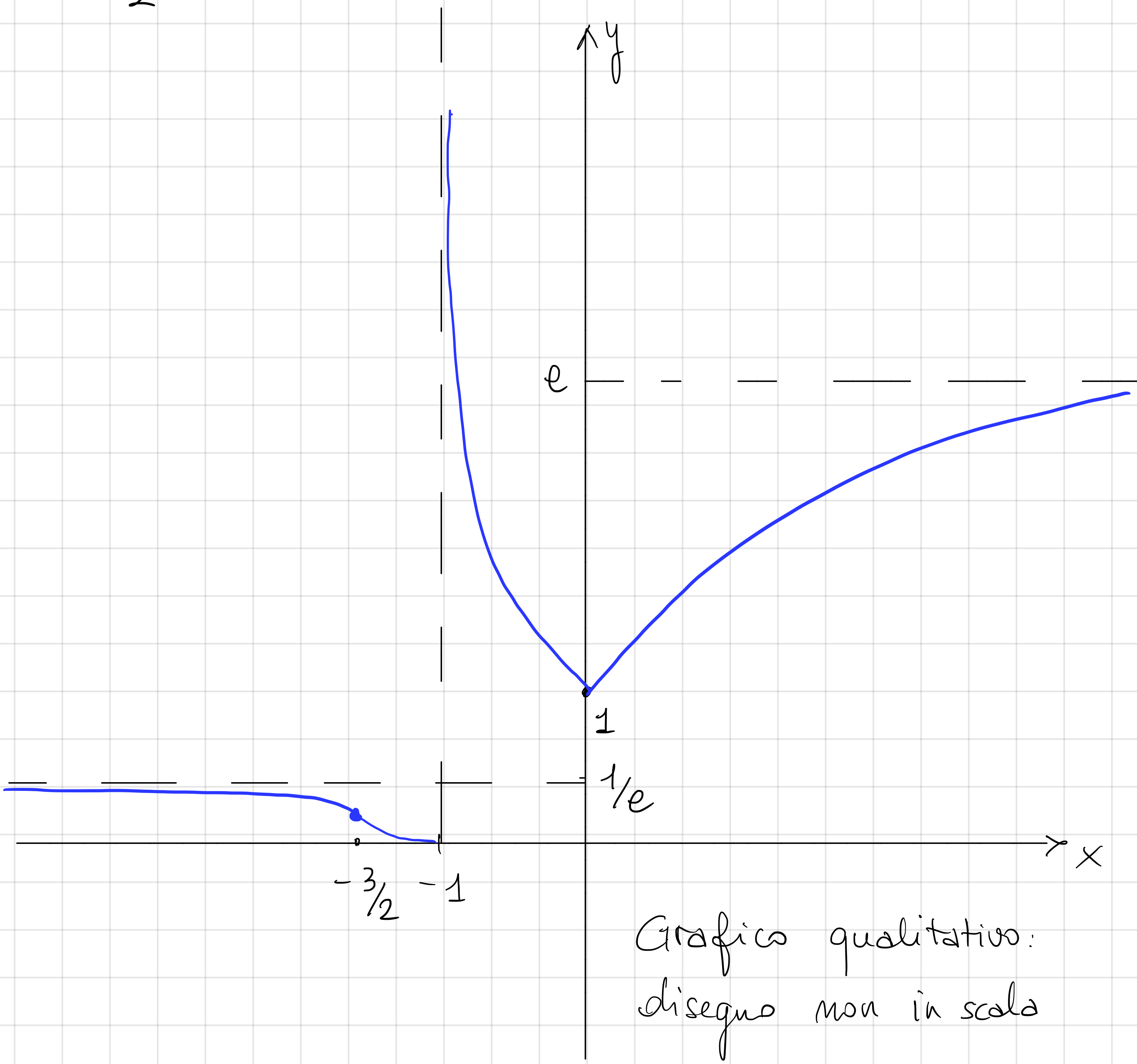


Grafico qualitativo:
disegno non in scala

2. a) Calcolare $\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$;

b) Posto $I_n = \int_0^1 x^n\,e^{-x^2}\,dx$, trovare una formula che esprima I_n $(n \geq 2)$ in funzione di I_{n-2};

c) Usare la formula trovata al punto b) per trovare I_5.

a) Ponendo $t = -x^2$, da cui $dt = -2x\,dx$

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{e^t}{2} + c = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

b) $$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1}\left(x e^{-x^2}\right) dx =$$ [integrando per parti]

$$= -x^{n-1}\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^1 + \frac{(n-1)}{2}\int_0^1 x^{n-2} e^{-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + (n-1)\, I_{n-2}\right)$$

c) $I_1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$ (per il punto a))

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + 2 I_1\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + 1 - e^{-1}\right) = \frac{1-2e^{-1}}{2}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + 4 I_3\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + 2 - 4e^{-1}\right) = \frac{2-5e^{-1}}{2} =$$

$$= \frac{2e-5}{2e}$$

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel piano complesso dell'equazione

$$(z-1)^4 + z^4 = 0\,.$$

Dividiamo per z^4 ($z=0$ non è soluzione):

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^4 = -1.$$

Ponendo $w = \dfrac{z-1}{z}$, diventa $w^4 = -1$.

Dobbiamo trovare le radici quarte di $-1 = e^{i\pi}$

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Poi risolvo $z - 1 = wz \iff z = -\dfrac{1}{w-1}$

$$k=0 \Rightarrow w_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Rightarrow$$

$$z_0 = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1-i} = \frac{\sqrt{2}-1+i}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{1+i(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow w_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \Longrightarrow$$

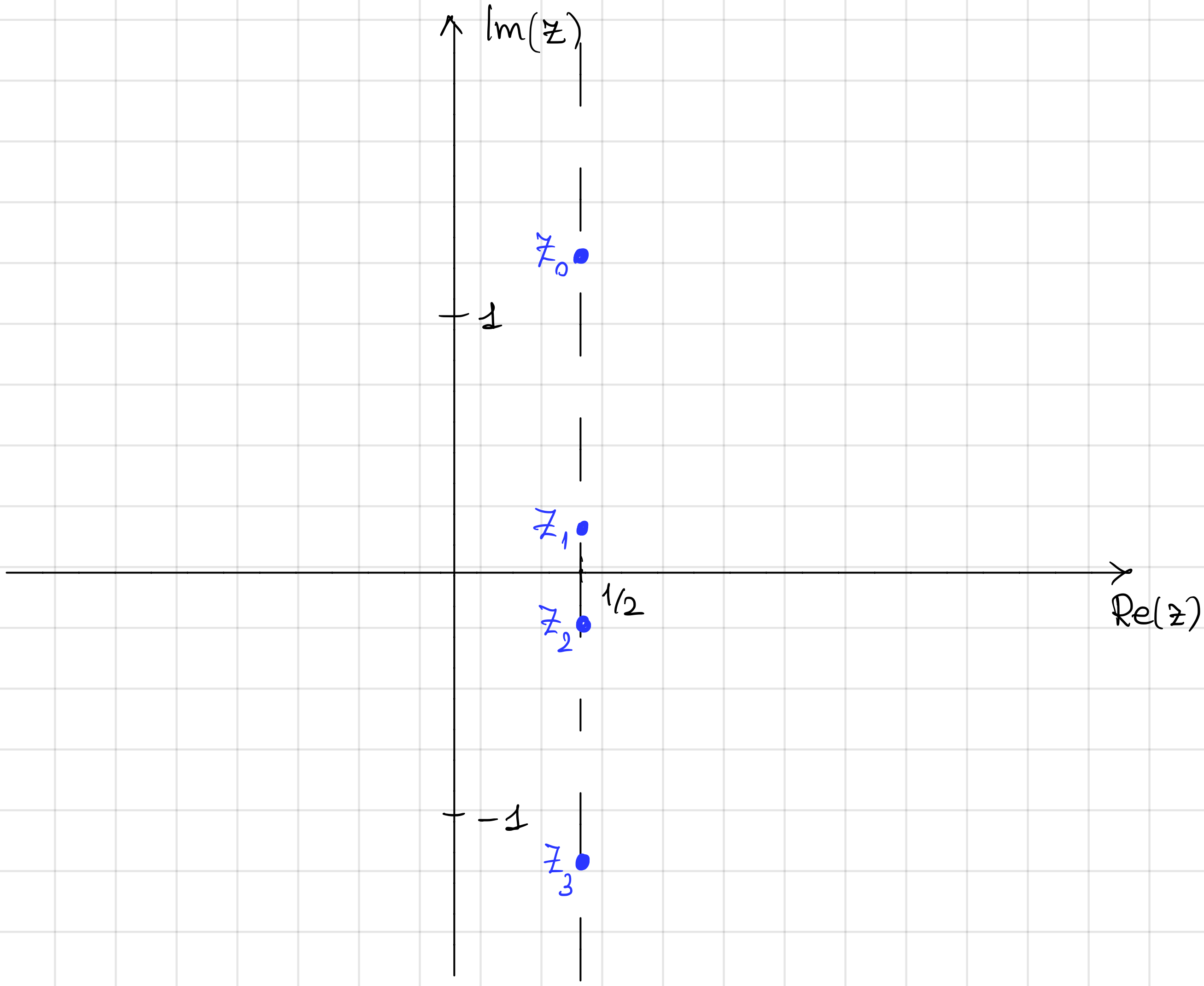
$$\Longrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{1+i(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$k=2 \Longrightarrow w_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{1-i(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$k=3 \Rightarrow w_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1+i} = \frac{1-i(\sqrt{2}+1)}{2}$$



Im(z)
Re(z)
1
−1
1/2
z_0
z_1
z_2
z_3

4. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(1-\cos x)}{x^2} & \text{se } x<0\\ a(x^4+1)-bx^2 & \text{se } x\geq 0\,,\end{cases}$$

trovare tutte le coppie $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ (se esistono) che rendano vera (separatamente) ciascuna delle seguenti condizioni:

a) f è continua in $\mathbb{R}$;

b) f definitivamente crescente per $x\to+\infty$;

c) f ammette un flesso in $x_0=1$;

d) f ammette massimo relativo in $x_0=1$;

e) f è derivabile in $x_0=0$.

a) l'unico problema è la continuità da sinistra in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 4\underbrace{\frac{(1-\cos x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} = 2 \overset{?}{=} f(0) = a$$

Risposta: $a=2$, b qualsiasi

b) $f'(x) = 4ax^3 - 2bx$

Se $a>0$, oppure se $a=0$ e $b<0$, allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ strettamente crescente def^{te} per $x\to+\infty$

Se $a<0$, oppure se $a=0$ e $b>0$, allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$

$\Rightarrow f$ strettamente decrescente, def^{te} per $x\to+\infty$.

Se $a=0$, $b=0$, allora $f(x)\equiv 0$, si può considerare crescente.

Risposta: ($a>0$, b qualsiasi), oppure ($a=0$, $b\leq 0$)

c) Deve essere $f''(1) = (12ax^2 - 2b)\Big|_{x=1} = 12a - 2b = 0$.

Ma non basta. Controllo che $f'''(1) \neq 0$. Si ha

$$f'''(1) = 24ax\Big|_{x=1} = 24a$$

Se $a \neq 0$, $b = 6a$, allora $x = 1$ è un flesso.

se $a = b = 0$, allora $f \equiv 0$, $x = 1$ di solito non si considera un flesso (ma qui dipende dal testo di rif.)

Risposta: $a \neq 0$, $b = 6a$.

d) Deve essere $f'(1) = 4a - 2b = 0$. Quindi $b = 2a$

Ma non basta. Vediamo $f''(1) = 12a - 2b =$
$= 12a - 4a = 8a$.

Quindi: se $a < 0$, $b = 2a \Rightarrow x = 1$ è pto di massimo relativo stretto

se $a > 0$, $b = 2a \Rightarrow x = 1$ è pto di minimo relativo stretto.

se $a = b = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

$\Rightarrow x = 1$ si può considerare massimo relativo.

Risposta. $a \leq 0$, $b = 2a$

e) In primo luogo f deve essere continua $\Rightarrow a=2$, per quanto visto al punto a).
L'unico problema è la derivata nello zero.

$$f'_+(0) = (4ax^3 - 2bx)\Big|_{x=0} = 0.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 4 \lim_{x\to 0^-} \frac{x \operatorname{sen} x - 2(1-\cos x)}{x^3} = [\text{Taylor}]$$

$$= 4 \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 2\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}{x^3} =$$

$$= 4 \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^5)}{x^3} = 0 \Rightarrow f \text{ derivabile in } x=0.$$

Risposta: $a=2$, b qualsiasi.

Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{3}{n}\right)^{\alpha}.$$

a) La serie è a termini positivi.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} \sim \frac{3}{n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$,

quindi converge se e solo se $\alpha > 1$

b) Utilizzando lo sviluppo di Taylor $\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n} = \left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$,

quindi converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.