SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Corso di Laurea in Fisica
Laboratorio di Calcolo - **Esercitazione valutata n. 2**

In questa esercitazione vogliamo stimare la massa contenuta in un ammasso globulare di stelle sapendo che il suo profilo di densità $\rho(r)$ è qualcosa del tipo

$$\rho(r) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right) ,$$

dove $A$ è una costante, $r$ rappresenta la distanza dal centro misurata in pc e $R$ è il raggio dell'ammasso. La massa di un simile oggetto racchiusa in una sfera di raggio $\mathcal{R}$ è

$$M(\mathcal{R}) = 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \rho(r) r^2 dr \, .$$

Lo scopo di questa esercitazione è quello di valutare il valore di $M(\mathcal{R})$ di un ammasso con $R = 25$ pc, per diversi valori di $\mathcal{R}$ usando il metodo dei rettangoli, nei casi in cui l'intervallo d'integrazione $[0, \mathcal{R}]$ è diviso in $n = 1$, 2, 4, 8 e 16 parti. Sapendo che il resto dell'integrale scala come $1/n$, ottenere l'intercetta della retta che meglio approssima i dati di $M(\mathcal{R})$ in funzione di $1/n$ equivale a calcolare il limite per $n \to \infty$.

Dopo aver avuto accesso alla macchina con lo *username* `studente` e *password* `informatica`, scrivete un programma, nella *home directory* di `studente`, in un *file* di nome `valutata_2_<gruppo>.c` dove `<gruppo>` rappresenta il numero del gruppo cui appartenete. Includete un commento nel programma nel quale scriverete i nomi degli autori e seguite la traccia che segue.

(1) Definite una funzione di nome `density` che restituisca il valore di $\rho(r)$, dato $r$. Con un'opportuna scelta delle unità si può sempre porre $A = 1$.
(2) Scrivete una funzione di nome `integrate` che accetta in ingresso il puntatore alla funzione $\rho(r)$, gli estremi d'integrazione $a$ e $b$, e il numero $n$ di parti in cui dividere l'intervallo d'integrazione. La funzione deve restituire l'integrale $M(\mathcal{R})$ tra gli estremi generici $a$ e $b$, stimato con la formula dei rettangoli avendo diviso l'intervallo $[a, b]$ in $n$ parti.
(3) Nel `main`, riempite un array bidimensionale di taglia $5 \times 125$ con i valori stimati dell'integrale calcolati con $n = 2^m$ e $m < 5$ intero, per i valori di $\mathcal{R}$ compresi tra 0 e 125, a passi di 1. Se, ad esempio, l'array si chiama `M`, la componente `M[2][45]` contiene il valore della massa stimata con $m = 2$ e per $\mathcal{R} = 45$.
(4) Scrivete i valori delle masse cosí stimate su un file di nome `integrals.dat`. Nel file devono essere presenti 125 righe. Ciascuna riga deve riportare il valore di $\mathcal{R}$ per il quale è riportata la massa stimata e gli $N = 5$ valori stimati con i diversi $n$ crescenti.
(5) Definite una funzione `fit` che accetta in ingresso, tra le altre variabili necessarie, due array che rappresentano i valori $x_i$ e $y_i$ di due grandezze fisiche misurate contemporaneamente, per le quali si suppone $y = Ax + B$. La funzione esegue una regressione lineare e calcola i parametri $A$ e $B$ con le relative incertezze.
(6) Costruite nel `main` due array `x` e `y` di $N = 5$ componenti ciascuno che contengano, rispettivamente, i valori di $1/n$ e del valore della massa $M(100)$ stimata con $n$ divisioni dell'intervallo d'integrazione $[0, 100]$. Usate i valori che avete memorizzato nell'array bidimensionale del punto precedente.
(7) Usando la funzione `fit` ottenetene l'intercetta e il suo errore. Assumete che tutti i punti sperimentali abbiano lo stesso errore $\sigma_i = 1$, in opportune unità (naturalmente non è cosí, ma lo facciamo per semplicità).
(8) Scrivete sullo schermo i valori delle coppie $(1/n, M(100))$ e, infine, il valore dell'intercetta della retta che meglio approssima i dati con il suo errore. Questo sarà il valore dell'integrale per $n \to \infty$.

Per controllare il risultato finale potete usare `gnuplot` per osservare il grafico di $M(r)$ in funzione di $r$ con il comando `plot 'integrals.dat' using 1:n` dove `n` varia tra 2 e 6, secondo la colonna di cui si vuole vedere il grafico. Osservate i grafici per $n = 2$ e $n = 3$. Come ve li spiegate? Per controllare il risultato del fit potete eseguire la stessa operazione usando `gnuplot`. Fate un grafico con i valori di $x_i$ e di $y_i$ che avrete copiato su un file di nome `data.dat` e poi date il comando `fit A+B*x 'data.dat' via A,B`.

Se siete a Via Tiburtina, al termine della prova copia il tuo compito nella directory `/home/studenti/studente/`.