1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{3\ln^2|x| - 2\ln|x| + 1}{\ln|x|},$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. f è derivabile, quindi continua, nel suo dominio

Simmetria: f è pari. Basta studiarla per $x > 0$.

Limiti significativi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\Big(\underbrace{3\ln x}_{\to -\infty} - 2 + \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0}\Big) = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\Big(\underbrace{3\ln x}_{\to 0} - 2 + \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to \pm\infty}\Big) = \pm\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\Big(\underbrace{3\ln x}_{\to +\infty} - 2 + \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\Big(\underbrace{\frac{3\ln x}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x\ln x}}_{\to 0}\Big) = 0$$

f non ammette asintoti orizzontali/obliqui.

Studio di f':

$$f'(x) = D\left(3\ln x - 2 + \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x\ln^2 x} = \frac{3\ln^2 x - 1}{x\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = e^{\pm\sqrt{3}/3}$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(0, e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) \cup \left(e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}, +\infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}, 1\right) \cup \left(1, e^{\sqrt{3}/3}\right)$$

f strettamente crescente in $(0, e^{-\sqrt{3}/3}]$ e in $[e^{\sqrt{3}/3}, +\infty)$.

f strettamenti decrescente in $[e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}, 1)$ e in $(1, e^{\sqrt{3}/3}]$

$x = e^{-\sqrt{3}/3}$ punto di massimo relativo.

$x = e^{\sqrt{3}/3}$ " " minimo ".

$$f\left(e^{-\sqrt{3}/3}\right) = -(2\sqrt{3}+2); \quad f\left(e^{\sqrt{3}/3}\right) = 2\sqrt{3} - 2.$$

Studio di f'':

$$f''(x) = D\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x\ln^2 x}\right) = -\frac{3}{x^2} + \frac{\ln x + 2}{x^2\ln^3 x} =$$

$$= \frac{-3\ln^3 x + \ln x + 2}{x^2\ln^3 x}$$

Osservato che il polinomio $-3t^3 + t + 2$ si annulla per $t = 1$, si può fattorizzare il numeratore, ottenendo:

$$f''(x) = -\frac{(\ln x - 1)(3\ln^2 x + 3\ln x + 2)}{x^2\ln^3 x}$$

$f''(x) = 0 \iff x = e$

$f''(x) > 0 \iff x \in (1, e)$

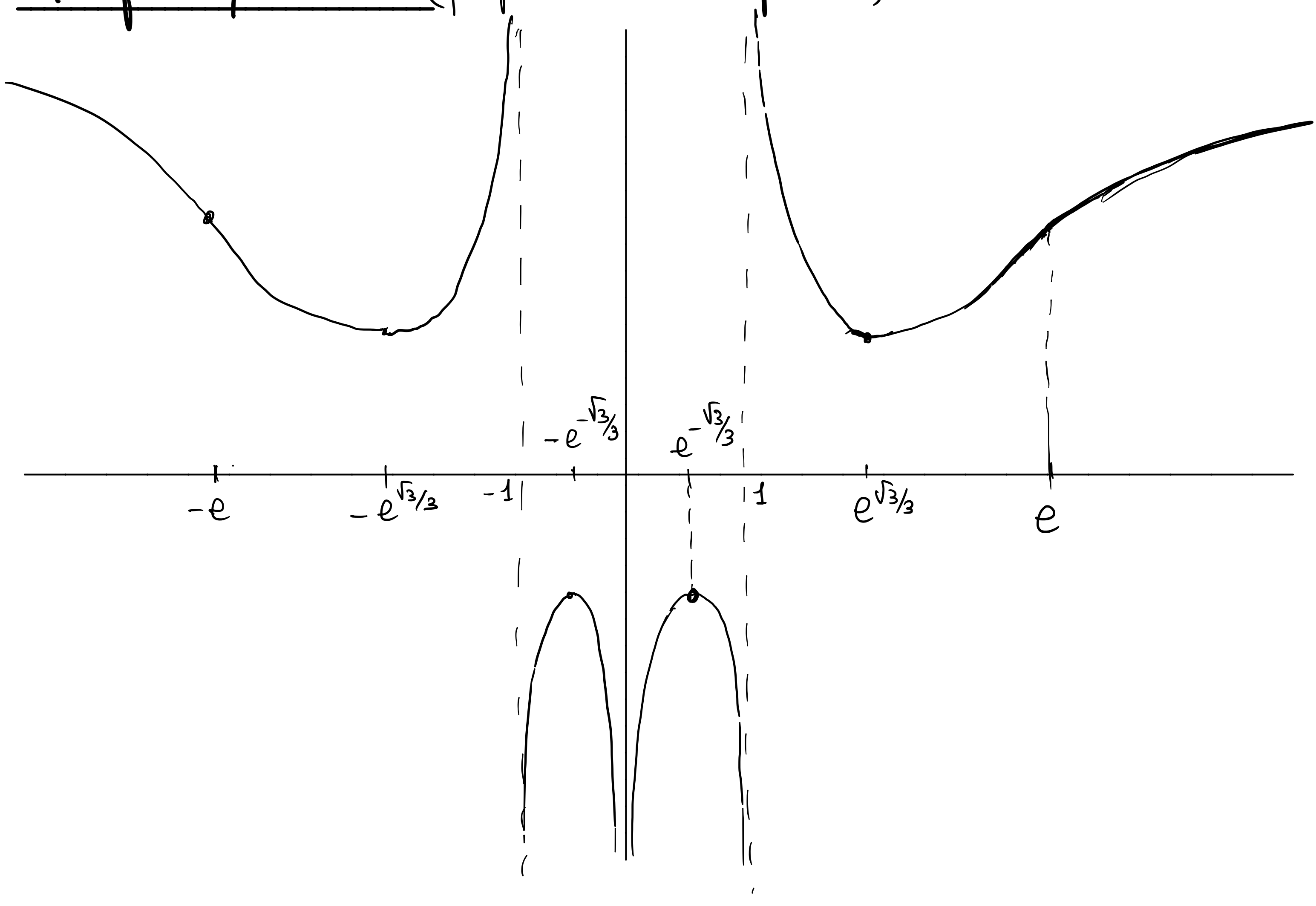
$f''(x) < 0 \iff x \in (0,1) \cup (e, +\infty)$

f è strettamente convessa in $(1, e]$

f è strettamente concava in $(0,1)$ e in $[e, +\infty)$

$x = e$ è un punto di flesso.

Grafico qualitativo (proporzioni non rispettate).



2. a) Calcolare l'integrale $\int x^3 \cos(x^2+2)\,dx$.

b) Trovare una formula ricorsiva per l'integrale $I_n(x) = \int x^{2n+1} \cos(x^2+2)\,dx$.

a) $$\int x^3 \cos(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int t \cos(t+2)\,dt =$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{sost } x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}}$

[per parti: $f(t) = t$, $f'(t) = 1$
$g'(t) = \cos(t+2)$, $g(t) = \operatorname{sen}(t+2)$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t+2) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(t+2)\,dt =$$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t+2) + \frac{1}{2}\cos(t+2) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 \operatorname{sen}(x^2+2) + \cos(x^2+2)\right] + c$$

b) Osservare che $I_n(x) = \frac{1}{2}\int t^n \cos(t+2)\,dt$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{sost } x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}}$

Quindi, si può procedere per parti

$$I_n(x) = \frac{1}{2}\int t^n \cos(t+2)\,dt =$$

$\left[\begin{array}{ll} f(t) = t^n, & f'(t) = n t^{n-1} \\ g'(t) = \cos(t+2), & g(t) = \sin(t+2) \end{array}\right]$

$$= \frac{t^n}{2}\sin(t+2) - \frac{n}{2}\int t^{n-1}\sin(t+2)\,dt =$$

$\left[\text{per parti: } \begin{array}{ll} f(t) = t^{n-1}, & f'(t) = (n-1)\,t^{n-2} \\ g'(t) = \sin(t+2), & g(t) = -\cos(t+2) \end{array}\right]$

$$= \frac{t^n}{2} \sin(t+2) + \frac{n}{2} t^{n-1} \cos(t+2) - \frac{n(n-1)}{2} \int t^{n-2} \cos(t+2)\, dt$$

$$= \frac{x^{2n}}{2} \sin(x^2+2) + \frac{n}{2} x^{2n-2} \cos(x^2+2) - n(n-1)\, I_{n-2}(x)$$

Questa è la formula cercata.

3. Dato il numero complesso
$$z = \frac{i(3a-2i)}{3i-1},$$
trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che z sia un numero reale. Per tale valore di a, trovare le radici seste di z.

$$z = \frac{i(3a-2i)}{3i-1} = \frac{3ai+2}{3i-1} \cdot \frac{-3i-1}{-3i-1} = \frac{9a-3ai-6i-2}{10} =$$

$$= \frac{9a-2}{10} - i\,\frac{(3a+6)}{10}.$$

Questo numero è reale se e solo se $\boxed{a=-2}$. In tal caso

$\boxed{z = -2 = 2e^{i\pi}}$, Ne calcolo le radici seste.

$$w_k = \sqrt[6]{2}\, e^{i\theta_k}, \quad \text{con} \quad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},$$
$$k = 0,1,2,3,4,5.$$

Quindi

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/6} = 2^{-5/6}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/2} = \sqrt[6]{2}\, i$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2^{-5/6}\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{7}{6}\pi} = 2^{-5/6}\left(-\sqrt{3}-i\right) = \overline{w_2}$$

$$w_4 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt[6]{2}\, i = \overline{w_1}$$

$$w_5 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{11}{6}\pi} = 2^{-5/6}\left(\sqrt{3}-i\right) = \overline{w_0}.$$

4. Studiare, al variare dei parametri reali a, x, la convergenza delle seguenti serie:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{5+an^2}{3n^2+2}, \quad ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{5+an^2}{3n^2+2}, \quad iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{5+an^2}{3n^2+2} (x-5)^n .$$

Osserviamo che le serie sono definite solo per $a \geq 0$, altrimenti l'argomento del logaritmo è definitivamente negativo.

i) Per $a \geq 0$, $a \neq 3$, il termine della serie non è infinitesimo. Quindi la serie non converge. Più precisamente, la serie diverge a $+\infty$ se $a > 3$ (serie a termini positivi), mentre diverge a $-\infty$ se $0 \leq a < 3$ (serie definitivamente a termini negativi).

Per $a = 3$, la serie è a termini positivi, e si ha:

$$\ln \frac{5+3n^2}{3n^2+2} = \ln\left(1 + \frac{3}{3n^2+2}\right) \sim \frac{3}{3n^2+2} \sim \frac{1}{n^2}$$

e quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{n^2}$, che converge.

ii) Come nel caso precedente, la serie non converge se $a \neq 3$. Se $a = 3$, la serie converge perché, in base al punto precedente, converge assolutamente.

iii) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 5$, con coefficienti $a_n = \ln \frac{5+an^2}{3n^2+2}$.

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\ln \frac{5+a(n+1)^2}{3(n+1)^2+2}\right|}{\left|\ln \frac{5+an^2}{3n^2+2}\right|} = \left|\frac{\ln\left(\frac{a}{3}\right)}{\ln\left(\frac{a}{3}\right)}\right| = 1$$

(se $a > 0$, $a \neq 3$)

Nel caso particolare $a = 0$, si ha:

$$a_n = \ln \frac{5}{3n^2+2} = \ln 5 - 2\ln n - \ln\left(3 + \frac{2}{n^2}\right) \sim -2\ln n,$$

pertanto anche in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

Infine, nel caso particolare $a = 3$, abbiamo visto che $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

Quindi in ogni caso il raggio di convergenza vale 1.
La serie converge (assolutamente) se $|x-5| < 1$, cioè se $4 < x < 6$.
La serie non converge se $|x-5| > 1$, cioè se $x < 4$ opp. $x > 6$.
Per $x = 4$ e $x = 6$ la serie è stata studiata nei punti precedenti.

CONCLUSIONI:

La terza serie converge se e solo se:

$$\big(x \in (4,6) \wedge a \geq 0\big) \vee \big(x \in \{4,6\} \wedge a = 3\big).$$

5. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore delle seguenti successioni:

$$a_n = \sqrt{2n^2 - 13n + 25}\,, \qquad b_n = n - \sqrt{n^2 + 4n + 10}\,.$$

La successione $\{a_n\}$ ha la stessa monotonia di $2n^2 - 13n + 25$. Dallo studio della parabola $y = 2x^2 - 13x + 25$, questa ammette un minimo assoluto in $x = \frac{13}{4}$, quindi a_n decresce fino ad a_3, cresce da a_4 in poi.

Tenuto conto che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si ha:

$$\sup_n a_n = +\infty,$$

$$\inf_n a_n = \min_n a_n = \min\{a_3, a_4\} = \min\{2, \sqrt{5}\} = 2$$

Per studiare $\{b_n\}$, consideriamo la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4x + 10}$$

La derivata $f'(x) = 1 - \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+10}}$ è positiva $\forall x \geq 0$.

Quindi la successione $b_n = f(n)$ è crescente. Ne segue che $\inf\limits_n b_n = \min\limits_n b_n = b_0 = -\sqrt{10}$.

(non era precisato se n partiva da 0 oppure da 1: entrambe le scelte sono accettabili).

$$\sup_n b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 4n + 10}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \underbrace{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{10}{n^2}}\right)}_{\sim -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n} + \frac{10}{n^2}\right) \sim -\frac{2}{n}} = -2$$