Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA
Esercitazioni in Laboratorio - A.A. 2018/19

Foglio 6: Risoluzione numerica di equazioni alle derivate parziali - Problemi iperbolici

A. Scrivere i codici

- **euleroAV**, **laxfriedrichs**, **laxwendroff**, **upwind**, **euleroIND**, che implementano un passo dei seguenti metodi alle differenze finite

  (a) Eulero in avanti/centrato

  (b) Lax-Friedrichs

  (c) Lax-Wendroff

  (d) Eulero in avanti/decentrato [Upwind]

  (e) Eulero all'indietro/centrato

  per la discretizzazione del problema di trasporto scalare:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a u_x(x,t) = 0, & a > 0,\ x \in (\alpha, \beta),\ t > 0, \\ u(\alpha, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \tag{1}$$

- **leapfrog** che implementa il metodo Leap-Frog per la discretizzazione del problema dello spostamento trasversale di una corda elastica vibrante fissata agli estremi (ovvero con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee), soggetta all'azione di una forza verticale di densità $f(x,t)$, ove siano dati spostamento $u_0(x)$ e velocità $v_0(x)$ all'istante iniziale $t = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \gamma^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), & \gamma \in \mathbb{R},\ x \in (0, L),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x,0) = v_0(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \tag{2}$$

B. Laboratorio MATLAB

1. Calcolare le soluzioni fornite dagli schemi numerici (b), (c), (d), (e), all'istante $T = 4$, del problema iperbolico (1) con $a = 0.8$, $\alpha = -1$, $\beta = 5$, e dato iniziale a supporto compatto $u_0(x) = \sin^2(\pi x)\chi_{[0,1]}$ (dove $\chi_{[a,b]}$ denota la funzione caratteristica, che vale 1 in $[a,b]$ e 0 altrimenti), avendo fissato $\Delta x = 1.e-2$ e $\Delta t = 1.e-2$. (Nell'applicare i metodi, assumere $u(\beta, t) = 0$, per $t \leq T$). Visualizzare la soluzione vera e la soluzione fornita dai metodi considerati - sia come superfici (utilizzando le functions **meshgrid** e **mesh** del MATLAB) che come animazione (in modalità 'drawnow').

2. Considerare il problema definito al punto 1 e calcolare le soluzioni fornite dagli schemi numerici (a), (b), (c), (d), (e), fissando $\Delta x = 1.e-2$ e scegliendo Δt in modo che lo schema Eulero in avanti/centrato non sia instabile. Visualizzare come sopra.

3. Calcolare la soluzione numerica dell'equazione iperbolica del second'ordine (2) con $L = 1$, $\gamma = 0.5$, $f(x,t) \equiv 0$, $T = 5$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x) \equiv 0$, data dallo schema Leap-Frog, avendo fissato $\Delta x = \Delta t = 1.e-2$. In particolare, si dovrà preventivamente approssimare opportunamente $u(x, \Delta t)$, che deve fungere da coordinata di innesco. Visualizzare la soluzione vera

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\frac{\pi}{2}t)$$

e la soluzione numerica sia come superfici che come animazione.

4. Calcolare la soluzione numerica del problema definito al punto 3, considerando $f(x,t) = 10\,\exp(-t)\sin(\pi x)$ e $u_0(x) = \sin(\pi x)/10$. La soluzione del problema è

$$u(x,t) = \frac{\sin(\pi x)\cos(\frac{\pi}{2}t)}{10} + 10\,\sin(\pi x)\,\frac{\exp(-t) - \cos(\frac{\pi}{2}t) + \dfrac{2\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\pi}}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Visualizzare come sopra.