

# 1 Numeri complessi

Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

1.1 5

1.2  $1 + i$

1.3  $-i\sqrt{2}$

1.4  $6 - i2\sqrt{3}$

1.5  $7 - i2\sqrt{3}$

Calcolare

1.6  $\sqrt[3]{-i}$

1.7  $\sqrt{2 - 2i}$

1.8  $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$

1.9  $(1 + i)^6$

1.10  $(3 - 3i)^7$

1.11 Sia  $z = \frac{i + \sqrt{3}}{2}$ . Calcolare, in forma trigonometrica,  $\frac{1}{z}$  e  $\sqrt[4]{z}$ .

Risolvere le seguenti equazioni (o sistemi) nel campo complesso:

1.12  $z^2 - i\bar{z} = 0$

1.13  $(z + 2i)^2 = 4|z|^2 - 8(\text{Im}z)^2$

1.14  $z^2 + 2z + i = 0$

1.15  $z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$

1.16  $z^4 = |z|^2 + 2$

1.17  $|z|^2 z^2 = i$

1.18  $z + i\bar{z}^2 = -2i$

1.19  $z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i$

1.20  $z|z| - 2z - 1 = 0$

1.21  $z + \bar{z} - 3\text{Im}(z) = z^2 + |z|$

1.22  $z|z|^2 + |z|\bar{z}^2 - \bar{z}z^2 = i$

1.23  $(\bar{z})^2 - |z|^2 + 2\text{Im}(z) = i - 2$

1.24  $(z - i)^3 = 8i$

$$1.25 \begin{cases} |z^2 + 1| = 1 \\ \text{Re}(z) = \frac{1}{2}|z|^2 \end{cases}$$

1.26 Trovare le radici none di 1 che hanno parte reale positiva.

1.27 Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  l'equazione  $z + |z| = 3i + a$  ha soluzioni  $z \in \mathbb{C}$ ? Trovare tali soluzioni, se esistono.

1.28 Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z^3 - \bar{z}^3 = 0 \\ |\arg(z - 1)| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

è costituito dall'unione di tre semirette, e determinarle.

1.29 Scrivere i numeri complessi

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11}, \quad w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6$$

sia in forma trigonometrica che nella forma  $a + ib$ . Successivamente scrivere le radici seste di  $w$  (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso.

1.30 Scrivere i numeri complessi

$$z = (1 - i\sqrt{3})^4, \quad w = \frac{(1 - i\sqrt{3})^4}{(-1 - i)^6}$$

sia in forma trigonometrica che nella forma  $a + ib$ . Successivamente scrivere le radici terze di  $w$  (solo in forma trigonometrica) e disegnarle nel piano complesso.

1.31 Dato il numero complesso  $z = 2 - 2i$ , determinare:

- a)  $z^3$ ;      b)  $z^{13}$ ;      c)  $\frac{1}{z^3}$ ;
- d) le radici cubiche di  $z^3$  (in forma trigonometrica);
- e)  $z^3 \bar{z}^3$  (commentare: perché viene fuori un numero reale positivo?).

## 2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1:  $5e^{i0}$

1.2:  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

1.3:  $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

1.4:  $4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1.5:  $\sqrt{61}e^{-i \arctg \frac{2\sqrt{3}}{7}}$

1.12:  $z = 0$ ;  $z = -i$ ;  $z = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$

1.15:  $z = \pm 1$

1.25:  $z = 0$ ;  $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$