ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046
A.A. 2025/26 - SCHEDA 09 - 20251127

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA - SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 dx_3$ *dove* $B = B(O, R) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$.

ESERCIZIO 2. *Calcolare le coordinate del baricento del solido* $T = \{[2 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}]^2 + x_3^2 \leq 1\}$ *con densità di massa* $\delta(x) = \delta_0 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. *Si calcoli il volume del cono di raggio di base* R *e altezza* H *(e del relativo tronco di cono) sia utilizzando le coordinate cartesiane che le coordinate clindriche.*

ESERCIZIO 4. *Calcolare* $\int_E (x_1 + x_2) dx_1 dx_2$, *dove* $E = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \sqrt{1 - x_1^2}, x_1 \leq \sqrt{2}/2\right\}$.

ESERCIZIO 5. *Assegnate le funzioni*

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \qquad g(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 \qquad h(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 \qquad k(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

se ne calcoli l'integrale sui domini $\{0 \leq x_1 \leq p, 0 \leq x_2 \leq q\}$ *e* $B_r = \{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ *al variare di* $p, r, q \in (0, +\infty)$.

ESERCIZIO 6. *Sia* Q *il quadrilatero di vertici* $(1, 0)$, $(0, 1/2)$, $(-1, 0)$ *e* $(0, -1/2)$. *Calcolare*

$$\int_Q |x_1^2 - 4x_2^2| e^{(x_1 + 2x_2)^2} dx_1 dx_2$$

ESERCIZIO 7. *Si dimostri la formula del volume di un tronco di piramide retta a base quadrata.*

ESERCIZIO 8. *Si calcoli l'integrale*

$$\iiint_E x_3 dx_1 dx_2 dx_3$$

dove $E \subseteq \mathbb{R}^3$ *è la porzione del solido* $C = \{|x_1|, |x_2| \leq 1\}$ *contenuta nell'ottante* $\{x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$, *delimitata dai piani* $\{x_3 = 0\}$ *e* $\{x_1 + x_2 + 2x_3 = 3\}$

ESERCIZIO 9. *Si calcoli l'integrale*

$$\iiint_C x_1^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

dove $C \subseteq \mathbb{R}^3$ *è la corona sferica* $C = B(O, R) \setminus B(O, r)$, *con* $0 < r < R$.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 dx_3$ *dove* $B = B(O, R) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$.

DISCUSSIONE. Per il calcolo dell'integrale ricorriamo alle coordinate sferiche, visto che il dominio di integrazione B ossiede una evidente simmetria sferica e, quasi sempre, il cambio di variabile che più semplifica il calcolo degli integrali multipli è suggerito dalla geometria del dominio di integrazione più che dall'espressione della funzione integranda. Allora ricordando che

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ x_2 = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x_3 = r\cos(\phi) \end{cases} \qquad (r, \phi, \theta) \in K = [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \iiint_B \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\tilde{B}} r^2 \sin^2(\phi) \cdot r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \int_0^R r^4 dr \\ &= 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \sin(\phi)(1 - \cos^2(\phi)) d\phi = \frac{8}{15}\pi R^5 \end{aligned}$$

e l'esercizio è portato a compimento. ■

ESERCIZIO 2. *Calcolare le coordinate del baricento del solido* $T = \{[2 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}]^2 + x_3^2 \leq 1\}$ *con densità di massa* $\delta(x) = \delta_0 \in \mathbb{R}$.

DISCUSSIONE. Abbiamo già ricordato la definizione del baricentro (o centro di massa) b di un solido avente densità di massa $\delta(x)$, quindi scriviamo subito le espressioni degli integrali da calcolare nel caso in oggetto. La massa di T è, per definizione, l'integrale sul solido della funzione densità (di volume) di massa, quindi

$$\begin{aligned} m = \iiint_T \delta(x) dx_1 dx_2 dx_3 &= 2\pi\delta_0 \int_{\{(r-2)^2 + t^2 \leq 1\}} r dr dt \\ &= 2\pi\delta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [2 + \rho\cos(\phi)]\rho d\rho d\phi = 4\pi^2\delta_0 = \delta_0 m_3(T) \end{aligned}$$

dove abbiamo impiegato, nella risoluzione degli integrali, prima il cambio di variabili cilindriche

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \text{con determinante jacobiano} \qquad |\det(J)| = r$$

e successivamente il cambio di variabili polari

$$\begin{cases} r = \rho\cos(\phi) \\ t = \rho\sin(\phi) \end{cases} \qquad \text{con determinante jacobiano} \qquad |\det(J)| = \rho$$

questo perché possiamo pensare il toro T come un solido ottenuto ruotando un cerchio, quindi il primo cambio di variabili contiene l'angolo di rotazione θ. Siccome l'asse di rotazione è l'asse x_3, cioè la retta di equazioni $\{x_1 = x_2 = 0\}$ le funzioni trigonometriche agiscono solo sulle variabili x_1 e x_2. Il cerchio di partenza ha equazione $\{(x_1 - 2)^2 + x_3^2 \leq 1\}$ nel piano $\{x_2 = 0\}$, questo giustifica il secondo cambio di variabili. In generale i cambi di variabili devono sempre essere ispirati dalle simmetrie del dominio di integrazione, purtroppo non c'è una regola meccanica da poter seguire... Invece gli integrali per il calcolo delle coordinate di b valgono

$$b_k = \frac{\delta_0}{m} \iiint_T x_k dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \qquad \text{per } k = 1, 2, 3$$

in quanto la funzione integranda è sempre dispari rispetto ad uno dei piani di riferimento, mentre T è simmetrico, quindi ricaviamo che $b = O$. ■

ESERCIZIO 3. *Si calcoli il volume del cono di raggio di base* R *e altezza* H *(e del relativo tronco di cono) sia utilizzando le coordinate cartesiane che le coordinate clindriche.*

Discussione. Seguendo le richieste dell'esercizio calcoliamo il volume del cono usando prima le coordinate cartesiano e poi le coordinate cilindriche. Cominciamo scrivendo il solido come dominio normale

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_3 \le H, 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le R^2\right\} \qquad \text{con } R, H > 0$$

e integriamo per sezioni, cioè sfruttando la relazione

$$m_3(C) = \iiint_C dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^H m_2(S(t))dt \qquad \text{dove} \qquad S(h) = C \cap \{x_3 = t\}$$

Allora segue che

$$m_3(C) = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2}[H-t]^2\,dt = \pi\frac{R^2}{3H^2}\left[(t-H)^3\right]_0^H = \pi\frac{R^2}{3H^2}H^3 = \frac{1}{3}\pi HR^2$$

concludiamo questo primo calcolo osservando che l'integrazione per fili, almeno in questo caso, è un po' più impegnativa, come vedremo nel calcolo del volume del tronco di cono. Ricorrendo alle coordinate cilindriche il calcolo diventa è ugualmente agevole, come è lecito aspettarsi dalle simmetrie del dominio, infatti abbiamo

$$\begin{aligned} m_3(C) &= \iiint_{\tilde{C}} r dr d\theta dt = 2\pi \int_0^H \left[\int_0^{R(H-t)/H} r dr\right] dt = \pi \int_0^H \left[r^2\right]_0^{R(H-t)/H} dt \\ &= \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2}(H-t)^2 dt = \pi\left[\frac{R^2}{3H^2}(H-t)^3\right]_0^H = \frac{1}{3}\pi HR^2 \end{aligned}$$

Lo studio del tronco di cono è un po' più difficoltoso a partire dalla descrizione del solido che possiamo formulare come segue

$$T = \left\{0 \le x_3 \le h, x_1^2 + x_2^2 \le \frac{R^2}{H^2}(H - x_3)^2\right\} = \left\{0 \le x_3 \le \min\left\{h, H - \frac{H}{R}\left[x_1^2 + x_2^2\right]^{1/2}\right\}, x_1^2 + x_2^2 \le R^2\right\}$$

dove $R > 0$ è il raggio di base e $0 < h < H$ è l'altezza del taglio. Utilizzare la seconda scrittura di T come dominio normale significa procedere integrando per fili e, introducendo la quantità $R_* = R(1 - h/H)$, cioè il raggio del cerchio superiore del tronco, troviamo

$$\begin{aligned} m_3(T) &= \iint_{B(O,R)}\left[\int_0^{S(w)} dx_3\right] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{B(O,R_*)}\left[\int_0^h dx_3\right] dx_1 dx_2 + \iint_{B(O,R)\setminus B(O,R_*)}\left[\int_0^{\frac{H}{R}\left(R - \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)} dx_3\right] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\{x_1^2+x_2^2<R_*^2\})} h dx_1 dx_2 + \iint_{\{R_*^2<x_1^2+x_2^2<R^2\}} \frac{H}{R}\left(R - \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{R_*} h\rho d\rho\right] d\theta + \int_0^{2\pi}\left[\int_{R_*}^R \frac{H}{R}(R-\rho)\rho d\rho\right] d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{h}{2}\rho^2\right]_0^{R_*} + 2\pi H\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{3R}\rho^3\right]_{R_*}^R = \pi h R_*^2 + \frac{\pi}{3}HR^2 - \pi H R_*^2 + 2\pi\frac{R_*}{3}\cdot\frac{H}{R}R_*^2 \\ &= \pi h R_*^2 + \frac{\pi}{3}\frac{Rh}{R-R_*}R^2 - \pi\frac{Rh}{R-R_*}R_*^2 + 2\pi\frac{R_*}{3R}\frac{Rh}{R-R_*}R_*^2 \\ &= \frac{\pi}{3}h\left[3R_*^2 + \frac{R^2 - 3RR_*^2 + 2R_*^3}{R-R_*}\right] = \frac{\pi}{3}h\left[\frac{3R_*^2(R-R_*) + R^2 - 3RR_*^2 + 2R_*^3}{R-R_*}\right] \\ &= \frac{\pi}{3}h\left[\frac{R^3 - R_*^3}{R-R_*}\right] = \frac{\pi}{3}h\left[R^2 + RR_* + R_*^2\right] \end{aligned}$$

si osservi che se $R_* \longrightarrow 0^+$, e conseguentemente $h \longrightarrow H^+$, le espressioni ottenute (e i calcoli svolti) per il tronco di cono forniscono la formula del volume del cono tramite integrazione per fili. ■

Esercizio 4. *Calcolare*

$$\int_E (x_1 + x_2)dx_1dx_2$$

con $E = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le x_2 \le \sqrt{1-x_1^2}, x_1 \le \sqrt{2}/2\right\}$.

Discussione. Osserviamo subito che E è un insieme normale rispetto all'asse x_1, infatti vale

$$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le x_2 \le \sqrt{1-x_1^2}, 0 \le x_1 \le \sqrt{2}/2\right\}$$

per le formule di riduzione possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_E (x_1 + x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^{\sqrt{2}/2}\left[\int_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}(x_1+x_2)\,dx_2\right]dx_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2}\left[x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right]_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}dx_1 \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2}\left(x_1\sqrt{1-x_1^2} + \frac{1}{2} - 2x_1^2\right)dx_1 = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\sqrt{t}dt + \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'insieme E si può scrivere, in modo equivalente, nella forma

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le x_2, x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

e rappresenta la parte di cerchio, di centro O e raggio 1, contenuta nel primo quadrante e delimitato dalla bisettrice $x_2 = x_1$ e l'asse delle ordinate. Introducendo il sistema di coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta)\end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]$$

E si trasforma nell'insieme $F = \left\{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ e vale $\det[J(\rho,\theta)] = \rho$, quindi si ha

$$\int_E (x_1+x_2)dx_1dx_2 = \int_F (\cos(\theta)+\sin(\theta))\rho^2 d\rho d\theta = \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos(\theta)+\sin(\theta))d\theta = \frac{1}{3}$$

Naturalmente il risultato non dipende dal metodo risolutivo scelto! ∎

Esercizio 5. *Assegnate le funzioni*

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2 \qquad g(x_1,x_2) = x_1^2x_2 \qquad h(x_1,x_2) = x_1x_2^2 \qquad k(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$$

se ne calcoli l'integrale sui domini $\{0 \le x_1 \le p, 0 \le x_2 \le q\}$ *e* $B_r = \{x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}$ *al variare di* $p, r, q \in (0, +\infty)$.

Discussione. Anche per questo secondo esercizio procediamo senza troppi commenti concentrandoci sul calcolo degli integrali. Gli integrali sul rettangolo $Q_{p,q}$ non presentano difficoltà: basta tener presente le formule di riduzione degli integrali multipli e osservare che le funzioni sono tutte prodotti di funzioni di una sola variabile, in modo da ottenere

$$\begin{aligned}\int_{Q_{p,q}} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^p x_1dx_1\int_0^q x_2dx_2 = \frac{1}{4}p^2q^2 \\ \int_{Q_{p,q}} g(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^p x_1^2dx_1\int_0^q x_2dx_2 = \frac{1}{6}p^3q^2 \\ \int_{Q_{p,q}} h(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^p x_1dx_1\int_0^q x_2^2dx_2 = \frac{1}{6}p^2q^3 \\ \int_{Q_{p,q}} k(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^p x_1^2dx_1\int_0^q x_2^2dx_2 = \frac{1}{9}p^3q^3\end{aligned}$$

Per gli altri integrali ricorriamo alle coordinate polari nel piano (si veda anche l'esercizio precedente) e procediamo come sopra

$$\int_{B_r} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta = 0$$
$$\int_{B_r} g(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^r \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = 0$$
$$\int_{B_r} h(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\cos(\theta)d\theta = 0$$
$$\int_{B_r} k(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^r \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \frac{r^6}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}r^6$$

dove bisogna stare attenti a non dimenticare il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana (in questo caso ρ). ∎

ESERCIZIO 6. *Sia* Q *il quadrilatero di vertici* (1,0), (0,1/2), (−1,0) *e* (0,−1/2). *Calcolare*

$$\int_Q |x_1^2 - 4x_2^2| e^{(x_1+2x_2)^2} dx_1dx_2$$

DISCUSSIONE. Il quadrilatero di vertici $P_1(1,0), P_2(0,1/2), P_3(-1,0), P_4(0,-1/2)$ è il rombo in figura **??** e può essere descritto algebricamente nel seguente modo

$$Q = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 - 2x_2 \le 1, -1 \le x_1 + 2x_2 \le 1\right\}$$

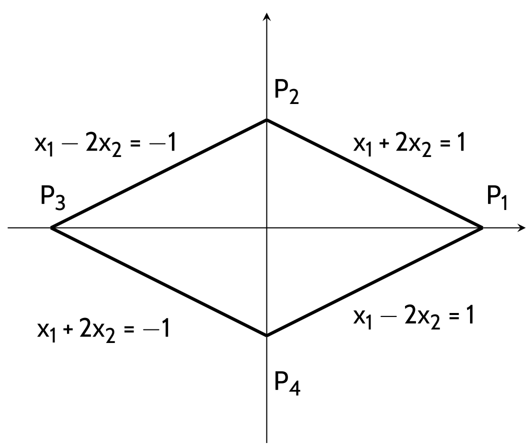

FIGURA 1. Insieme Q dell'esercizio 4.

Con il cambio di variabili

$$u_1 = x_1 - 2x_2 \qquad u_2 = x_1 + 2x_2$$

Q si trasforma nel quadrato

$$F = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le u_1 \le 1, -1 \le u_2 \le 1\}$$

e la trasformazione inversa è data dalle relazioni

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \qquad x_2 = \frac{1}{4}(u_2 - u_1)$$

La matrice jacobiana della trasformazione è la seguente

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

e il valore assoluto del determinante è $|\det J(u,v)| = 1/4 > 0$, quindi l'integrale richiesto è dato da

$$\frac{1}{4}\int_F |u_1u_2|e^{u_2^2}du_1du_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|u_1|du_1\int_{-1}^{1}|u_2|e^{u_2^2}du_2 = \int_0^1 u_1du_1\int_0^1 u_2e^{u_2^2}du_2 = \frac{e-1}{4}$$

■

Esercizio 7. *Si dimostri la formula del volume di un tronco di piramide retta a base quadrata.*

Discussione. Detto P il tronco di piramide, il volume di P è il risultato dell'integrale

$$m_3(P) = \int_P 1dx = \int_{\mathbb{R}^3}\chi_P(x)dx$$

da un punto di vista pratico il problema risiede nel descrivere più comodamente possibile il solido, in modo da rendere il calcolo più semplice. In questo caso è possibile procedere integrando "per sezioni" cioè sfruttando il teorema di Fubini per scrivere

$$m_3(P) = \int_{\mathbb{R}} m_2(P_s)ds \qquad \text{dove } P_s = P\cap\{x_3 = s\}$$

Osserviamo che la sezione $P_s = P\cap\{x_3 = s\}$ è un quadrato, quindi calcolando il lato della figura potremo ricavare facilmente la misura della sezione. Detto $\rho(s)$ la lunghezza del lato di P_s abbiamo che $\rho(0) = L$, dove L è il lato del quadrato di base, mentre $\rho(H) = l$, dove l è il lato del quadrato più piccolo del tronco e H l'altezza del solido, inoltre la funzione $\rho(s)$ deve essere affine, altrimenti P non sarebbe un tronco di piramide. Le precedenti osservazioni ci permettono di ricavare che

$$\rho(s) = \begin{cases} L-\left[\dfrac{L-l}{H}\right]s & s\in[0,H] \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad m_2(P_s) = \begin{cases} \left[L-\left(\dfrac{L-l}{H}\right)s\right]^2 & s\in[0,H] \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} m_3(P) &= \int_{\mathbb{R}} m_2(P_s)ds = \int_{[0,H]}\left[L-\left(\frac{L-l}{H}\right)s\right]^2 ds = \int_0^H\left[L^2-2L\frac{L-l}{H}s+\frac{(L-l)^2}{H^2}s^2\right]ds \\ &= \left[L^2s-L\frac{L-l}{H}s^2+\frac{(L-l)^2}{3H^2}s^3\right]_0^H = L^2H-L(L-l)H+\frac{1}{3}(L-l)^2H = \frac{1}{3}(L^2+l^2+Ll)H \end{aligned}$$

trovando l'espressione che compare sulla quarta di copertina di molti quaderni e quadernoni dei tempi che furono... ■

Esercizio 8. *Si calcoli l'integrale*

$$\iiint_E x_3dx_1dx_2dx_3$$

dove $E\subseteq\mathbb{R}^3$ *è la porzione del solido* $C = \{|x_1|,|x_2|\le 1\}$ *contenuta nell'ottante* $\{x_1,x_2,x_3\ge 0\}$, *delimitata dai piani* $\{x_3 = 0\}$ *e* $\{x_1+x_2+2x_3 = 3\}$

Discussione. Cominciamo osservando che la chiave dello svolgimento risiede nello scrivere "meglio" il dominio E, infatti possiamo osservare che

$$E = \left\{x : 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1, 0\le x_3\le\frac{1}{2}[2-x_1-x_2]\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

quindi possiamo scrivere che

$$\iiint_E x_3 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{(2-x_1-x_2)/3} x_3 dx_3 \right] dx_2 \right] dx_1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\frac{1}{2} x_3^2 \right]_0^{(2-x_1-x_2)/3} dx_2 \right] dx_1$$

$$= \frac{1}{18} \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[4 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_1x_2 \right] dx_2 \right] dx_1$$

$$= \frac{1}{18} \int_0^1 \left[4 + x_1^2 + \frac{1}{3} - 4x_1 - 2 + x_1 \right] dx_1 = \frac{1}{18} \int_0^1 \left[\frac{7}{3} - 3x_1 + x_1^2 \right] dx_1 = \frac{1}{18} \left[\frac{7}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{54}$$

e l'esercizio è terminato. ■

ESERCIZIO 9. *Si calcoli l'integrale*

$$\iiint_C x_1^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

dove $C \subseteq \mathbb{R}^3$ *è la corona sferica* $C = B(0,R) \setminus B(0,r)$, *con* $0 < r < R$.

DISCUSSIONE. Il dominio di integrazione C è una corona sferica (cioè la differenza insiemistica di due palle concentriche nello spazio), questa considerazione suggerisce l'uso delle coordinate sferiche per il calcolo dell'integrale, in modo da approfittare della simmetria di C, quindi ricordiamo che

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ x_2 = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ x_3 = \rho\cos(\phi) \end{cases} \quad \text{con} \quad (\rho,\theta,\phi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \quad \text{e} \quad \det[J] = \rho^2\sin(\phi)$$

A questo punto possiamo scrivere che

$$\iiint_C x_1^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\tilde{C}} \rho^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi)\rho^2\sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \left[\int_0^{\pi} \sin^3(\phi) \left[\int_r^R \rho^4 d\rho \right] d\phi \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{5}[R^5 - r^5] \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right] \left[\int_0^{\pi} \sin^3(\phi) d\phi \right] = \frac{\pi}{5}[R^5 - r^5] \left[\int_0^{\pi} \sin(\phi)(1 - \cos^2(\phi)) d\phi \right]$$

$$= \frac{\pi}{5}[R^5 - r^5] \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4\pi}{15}[R^5 - r^5]$$

dove abbiamo sfruttato che C in coordinate sferiche è il parallelepipedo $\tilde{C} = [r,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$. ■
