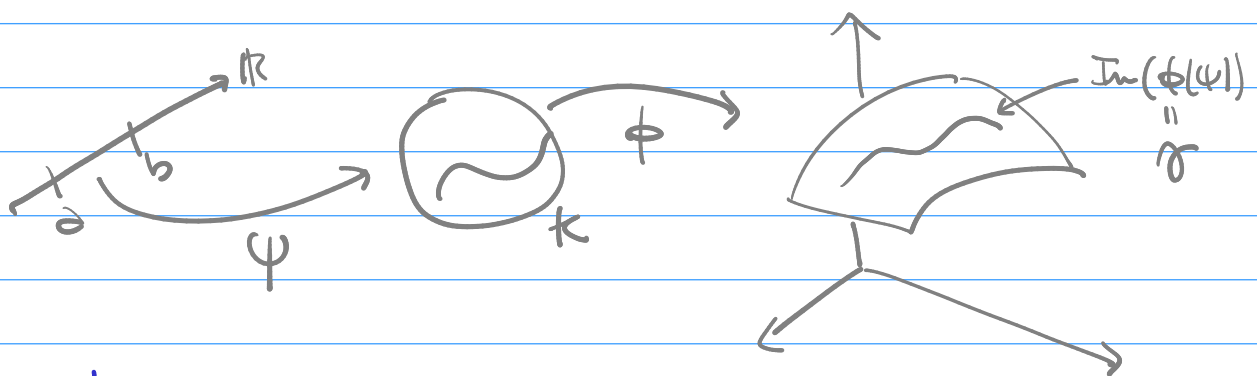


17/11/2025

$\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regolare
 $(u_1, u_2) \rightarrow \phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u), \phi_3(u))$

$\psi: [a, b] \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^2$ curva regolare
 $t \mapsto \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$

$\phi(\psi(t))$ curva regolare con immagine in $\mathbb{R}^3$



$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \phi(\psi(t)) \right\|_2 dt$$

$$\frac{d}{dt} \phi(\psi(t)) = J\phi(\psi(t)) J\psi(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_1(\psi(t)) & \partial_2 \phi_1(\psi(t)) \\ \partial_1 \phi_2(\psi(t)) & \partial_2 \phi_2(\psi(t)) \\ \partial_1 \phi_3(\psi(t)) & \partial_2 \phi_3(\psi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1(t) \\ \psi'_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= (\nabla \phi_1(\psi(t)) \cdot \psi'(t), \nabla \phi_2(\psi(t)) \cdot \psi'(t), \nabla \phi_3(\psi(t)) \cdot \psi'(t))$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \phi(\psi(t)) \right\|_2^2 &= [\partial_1 \phi_1(\psi(t)) \cdot \psi'_1(t)]^2 + 2 \partial_1 \phi_1(\psi(t)) \partial_2 \phi_1(\psi(t)) \psi'_1(t) \psi'_2(t) + [\partial_2 \phi_1(\psi(t)) \cdot \psi'_2(t)]^2 \\ &\quad + [\partial_1 \phi_2(\psi(t)) \cdot \psi'_1(t)]^2 + 2 \partial_1 \phi_2(\psi(t)) \partial_2 \phi_2(\psi(t)) \psi'_1(t) \psi'_2(t) + [\partial_2 \phi_2(\psi(t)) \cdot \psi'_2(t)]^2 \\ &\quad + [\partial_1 \phi_3(\psi(t)) \cdot \psi'_1(t)]^2 + 2 \partial_1 \phi_3(\psi(t)) \partial_2 \phi_3(\psi(t)) \psi'_1(t) \psi'_2(t) + [\partial_2 \phi_3(\psi(t)) \cdot \psi'_2(t)]^2 \\ &= [\partial_1 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_1 \phi(\psi(t))] [\psi'_1(t)]^2 + 2 [\partial_1 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_2 \phi(\psi(t))] \psi'_1(t) \psi'_2(t) \\ &\quad + [\partial_2 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_2 \phi(\psi(t))] [\psi'_2(t)]^2 \end{aligned}$$

$$= \psi'(t) \begin{pmatrix} \lambda \phi(\psi(t)) \cdot \partial_1 \phi(\psi(t)) & \partial_1 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_2 \phi(\psi(t)) \\ \partial_1 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_2 \phi(\psi(t)) & \partial_2 \phi(\psi(t)) \cdot \partial_2 \phi(\psi(t)) \end{pmatrix} \psi'(t)$$

$$= I(\psi'(t), \psi'(t)) \quad \text{prima forma fondamentale della superficie}$$

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} E = \lambda \phi \cdot \partial_1 \phi \quad F = \partial_1 \phi \cdot \partial_2 \phi \\ G = \partial_2 \phi \cdot \partial_2 \phi \end{array}$$

$$\det(F) = EG - F^2 = \|\partial_1 \phi\|_2^2 \|\partial_2 \phi\|_2^2 - (\partial_1 \phi \cdot \partial_2 \phi)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I(\psi'(t), \psi'(t))} dt$$

> sempre!
↓
= 0

$$(\partial_1 \phi \cdot \partial_2 \phi)^2 = (\|\partial_1 \phi\|_2 \cdot \|\partial_2 \phi\|_2)^2$$

$$\boxed{\theta = 0, \pi} \quad \leftarrow \|\partial_1 \phi\|_2 \|\partial_2 \phi\|_2 \cos(\theta)$$

ESERCIZIO 3. Assegnato il seguente vincolo

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 4x_3^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che S è chiuso e limitato,

ii. si trovino tutti i punti critici, vincolati su S , della funzione $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_3$,

iii. si scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione implicitamente definita da S intorno ai punti critici trovati in ii.

i. S è chiuso perché $S = \{g(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4x_3^2 = 0\} = g^{-1}(\{0\})$
e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4x_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3) = 0$$

$$g(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \in \partial B(e_3, 1) \quad \text{o} \quad x \in \partial B(-e_3, 1)$$

$$\Rightarrow S \text{ è compatto in } \mathbb{R}^3$$

ii. $L(x, c) = x_3 + c((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4x_3^2)$

$$\left[\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 2x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 2x + 1 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \pm 1)^2 = 1 \end{array} \right]$$

$$\partial_1 L(x, c) = c \cdot 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 2x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$\partial_2 L(x, c) = 4c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$$

$$\partial_3 L(x, c) = 1 + 2c[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 2x_3 - 4x_3] = 0$$

$$1 + 4cx_3[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2] = 0$$

$$\partial_4 L(x, c) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4x_3^2 = 0$$

$$x_3^4 - 4x_3^2 = x_3^2(x_3^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_3 = 0 \\ \searrow x_3 = \pm 2 \end{array}$$

$A(0, 0, 2)$ $B(0, 0, -2)$ punti critici vincenti

$$\text{III. } \partial_3 g(x) = 4x_3[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2], \quad \partial_3 g(A) = 16 \neq 0$$

[Th. di N.] $\Rightarrow \exists h: B(0, 0, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \quad ((2-\epsilon, 2+\epsilon))$ di classe C^∞
Tale che

$$g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in B(0, 0, \delta)$$

$$h(0, 0) = 2$$

infine

$$\nabla h(x_1, x_2) = - \frac{1}{\partial_3 g(x_1, x_2, h(x_1, x_2))} (\partial_1 g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)), \partial_2 g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)))$$

$$\nabla h(0, 0) = - \frac{1}{\partial_3 g(0, 0, 2)} (\underbrace{\partial_1 g(0, 0, 2)}_0, \underbrace{\partial_2 g(0, 0, 2)}_0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow h(x_1, x_2) = 2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

$$\begin{aligned} \partial_1 h(x) &= \partial_1 \left[- \frac{\partial_1 g(x, h(x))}{\partial_3 g(x, h(x))} \right] = - \frac{\cancel{\partial_1 g(x, h(x))} + \partial_{13} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_1 h(x)} \cdot \partial_3 g(x, h(x))}{[\partial_3 g(x, h(x))]^2} \\ &\quad - \frac{\partial_1 g(x, h(x)) [\partial_{23} g(x, h(x)) + \partial_{33} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_1 h(x)}]}{[\partial_3 g(x, h(x))]^2} \quad x = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\partial_{11} g(x) = 12x_1^2 + 4x_1^2 + 4x_3^2 \quad \partial_{13} g(x) = 8x_1x_3 \quad \partial_{33} g(x) = 4x_1^2 + 4x_1^2 + 12x_3^2 - 8$$

$$\partial_{11} h(0, 0) = - \left[\frac{\partial_{11} g(x, h(x))}{\partial_3 g(x, h(x))} \right]_{x=(0,0)} = - \frac{16}{16} = -1$$

$$\begin{aligned} \partial_{11} h(x) &= \partial_1 \left[- \frac{\partial_1 g(x, h(x))}{\partial_3 g(x, h(x))} \right] = - \left\{ \frac{[\partial_{12} g(x, h(x)) + \partial_{13} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_1 h(x)}] \partial_3 g(x, h(x))}{[\partial_3 g(x, h(x))]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial_1 g(x, h(x)) [\partial_{23} g(x, h(x)) + \partial_{33} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_1 h(x)}]}{[\partial_3 g(x, h(x))]^2} \right\} \quad x = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_{12} h(0, 0) = - \left[\frac{\partial_{12} g(x, h(x))}{\partial_3 g(x, h(x))} \right]_{x=(0,0)} = - \left[\frac{8x_1x_2}{4x_3^2 [(x_1^2 + x_2^2) - 2]} \right]_{x=(0,0)} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_{22} h(x) &= - \left\{ \frac{[\partial_{22} g(x, h(x)) + \partial_{23} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_2 h(x)}] \partial_3 g(x, h(x)) - \partial_2 g(x, h(x)) \cdot \right. \\ &\quad \left. [\partial_{23} g(x, h(x)) + \partial_{33} g(x, h(x)) \cdot \cancel{\partial_2 h(x)}]}{[\partial_3 g(x, h(x))]^2} \right\} \quad x = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_{22} h(0, 0) = - \left[\frac{\partial_{22} g(x, h(x))}{\partial_3 g(x, h(x))} \right]_{x=(0,0)} = - \frac{16}{16} = -1$$

$h(0, 0) = 2$

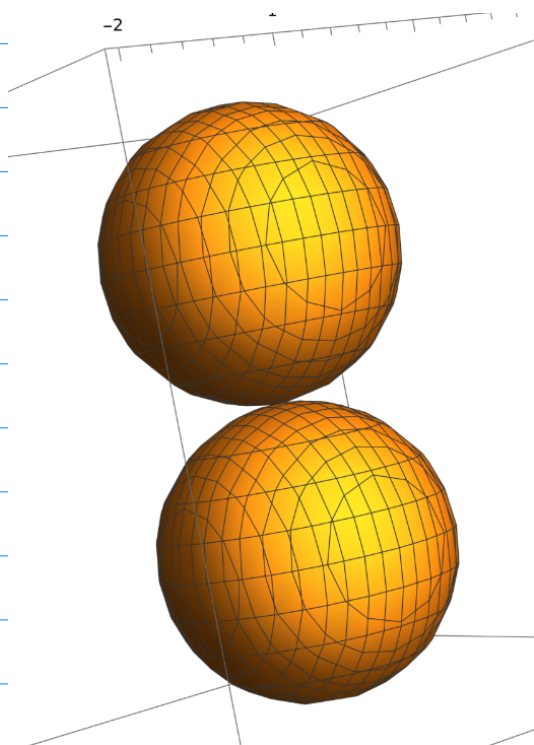
$$\partial_{22} g(x) = 4x_1^2 + 12x_1^2 + 4x_3^2$$

$$\Rightarrow Hh(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ definita negativa}$$

$(0,0)$ pts di massimo per h

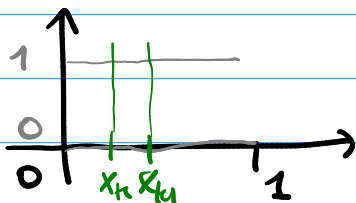
$$h(x) = h(0,0) + \nabla h(0,0) \cdot (x_1, x_2) + \frac{1}{2} [Hh(0,0)(x_1, x_2)] \cdot (x_1, x_2) + \dots$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + o(x_1^2 + x_2^2)$$



MISURA DI LEBESGUE

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{funzione di Dirichlet}$$



$$D(x) = 1 \cdot \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) + 0 \cdot \chi_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}(x)$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \quad \text{funzione caratteristica di } E$$

$\{f_k\}$ integrabili $f_k \rightarrow f_0$ puntualmente

TEOR

se $\{f_k\} \subseteq C^0[a,b]$ e $f_k \rightarrow f_0$ in $\|\cdot\|_\infty$ (Uniformemente)

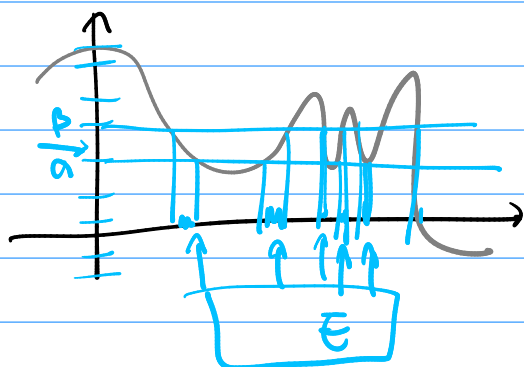
allora:

- i. $f_0 \in C^0[a,b]$
- ii. $\int_a^b f_0(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx$

Dimo i. f_k converge nello spazio di Banach $C^0[a,b]$, quindi $f_0 \in C^0[a,b]$ ed è integrabile secondo Riemann

ii.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b (f_k(x) - f_0(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f_0(x)| dx \leq \int_a^b \|f_k - f_0\|_\infty dx \\ &= \|f_k - f_0\|_\infty \int_a^b dx = (b-a) \|f_k - f_0\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int &\sim \sum \beta \ell(E) - \alpha \ell(E) \\ &= \sum (\beta - \alpha) \ell(E) \end{aligned}$$

$$R = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^n \text{ rettangolo}$$

$$P = \bigcup_{k=1}^N R_k \in \mathbb{R}^n \text{ plurirettangolo } (N \in \mathbb{N})$$

$$m_n(R) = |R|_n = |R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

$$m(P) = \sum_{k=1}^N |R_k| \quad (\text{e } R_i \cap R_j = \emptyset \text{ per } i \neq j)$$

DEF. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato

$$m_n(A) = \sup \{ |P| : P \text{ plurirettangolo e } P \subseteq A \}$$

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso limitato (compatto)

$$m_n(C) = \inf \{ |P| : P \text{ plurirettangolo e } P \supseteq C \}$$

DEF. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato

$$\bar{m}(E) = \inf \{ |A| : E \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperti limitati} \} \quad \text{misura esterna di } E$$

$$\underline{m}(E) = \sup \{ |C| : C \subseteq E \text{ chiuso} \} \quad \text{misura interna di } E$$

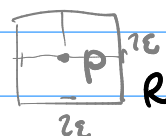
se $\bar{m}(E) = \underline{m}(E) =: m(E) = |E|$ diciamo che E è misurabile secondo Lebesgue

OSS. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato è misurabile se

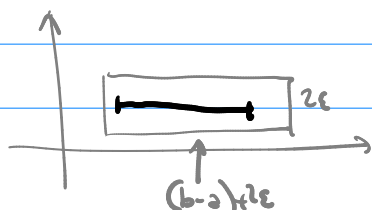
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow A_\varepsilon, C_\varepsilon$ limitati tali che

$$C_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon \quad \text{e} \quad m(A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$$

ESEMPIO $p \in \mathbb{R}^n \quad R_\varepsilon = \prod_{i=1}^n [p_i - \varepsilon, p_i + \varepsilon]$



$$p \in R_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |R_\varepsilon| = 2^n \varepsilon^n \Rightarrow |p| = m_n(p) = 0$$



$$\Rightarrow |\overline{p}| = 0$$

PROP.

$E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabili e limitati, allora

I. sono misurabili $E \cup F, E \cap F, E \setminus F$

II. $|E| \leq |F|$ se $E \subseteq F$

III. $|E| + |F| = |E \cup F| + |E \cap F|$

IV. $|E \cup F| = |E| + |F|$ se $|E \cap F| = 0$

DEF.

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato $m(E) = 0 \Rightarrow |E| = 0$

inoltre $\forall F: F \subseteq E \Rightarrow |F| = 0$

un insieme di misura nulla si dice Trascurabile.

TEOR.

$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabili e contenuti in $B(\bar{q}, \bar{r})$

$E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$, $G = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i$, allora

I. E è misurabile, $|E| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |E_i|$, $|E| = \sum_{i=1}^{+\infty} |E_i|$ se $E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j$

II. se $E_i \subseteq E_{i+1}$ allora $|E_i| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} |E|$

III. G è misurabile e se $E_i \supseteq E_{i+1}$ allora $|E_i| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} |G|$

PROPOS.

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e misurabile, allora

• $\forall W \in \mathbb{R}^n$ $E_W = \{x+W, x \in E\} = E+W \Rightarrow |E_W| = |E|$

• $\forall M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ortogonale $F = \{Mx, x \in E\} \Rightarrow |F| = |E|$

ESEMPIO

$|\{p\}| = 0$ in $\mathbb{R}$

$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, \dots, q_m, \dots\} \Rightarrow |E| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |\{q_i\}| = 0$

18/11/2025

ESERCIZIO 5. *Data la funzione*

$$x(u_1, u_2) = (u_2 \cos(u_1), u_2 \sin(u_1), u_1) \quad \text{con } u = (u_1, u_2) \in K = [0, 2\pi]^2$$

si verifichi che

i. (x, K) è una superficie regolare,

ii. $\partial_1 x(u_1, u_2)$ è sempre ortogonale a $\partial_2 x(u_1, u_2)$.

Infine si calcoli la lunghezza della curva sulla superficie prodotta dalla composizione della parametrizzazione della superficie con la curva contenuta in K di equazioni $\{\phi(s) = (s, u_0) : s \in [0, 2\pi]\}$ e $\{\psi(s) = (u_0, 1) : s \in [0, 2\pi]\}$.

$$1. \begin{cases} x(u) = x(w) \\ u, w \in \text{int}(K) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 \cos(u_2) = w_1 \cos(w_2) \\ u_1 \sin(u_2) = w_1 \sin(w_2) \\ u_1 = w_1 \end{cases} \rightarrow u_1 = w_1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(u_2) = \cos(w_2) \\ \sin(u_2) = \sin(w_2) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$(x, t) \text{ è una superficie regolare } u=w \Leftrightarrow u_2=w_2$$

$\partial_1 x(u) = (-u_2 \sin(u_1), u_2 \cos(u_1), 1)$
 $\partial_2 x(u) = (\cos(u_1), \sin(u_1), 0)$ sono linearmente indipendenti.

11. $\partial_1 x(u) \cdot \partial_2 x(u) = (-u_2 \sin(u_1) \cos(u_1) + u_2 \cos(u_1) \sin(u_1) + 1.0) = 0$

14. 

$$L(\Gamma_n(\phi)) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{ds} \times (\phi(s)) \right\|_2 ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + u_{\phi_1}^2} ds = \sqrt{1 + u_{\phi_1}^2} \cdot 2\pi$$

$$\begin{aligned} \chi(\phi(s)) &= (u_{0,2} \cos(s), u_{0,2} \sin(s), s) = r(s) \\ r'(s) &= (-u_{0,2} \sin(s), u_{0,2} \cos(s), 1) \\ \|r'(s)\|_2 &= \sqrt{u_{0,2}^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+u_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I(u)$$

$$L(\text{Im}(\psi)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{I(u)\psi'(s) \cdot \psi'(s)} ds = \int_0^{2\pi} ds = 2\pi$$

$$p(s) = x(\psi(s)) \quad \psi'(s) = \frac{d}{ds}(u_0, s) = (0, 1) = e_2$$

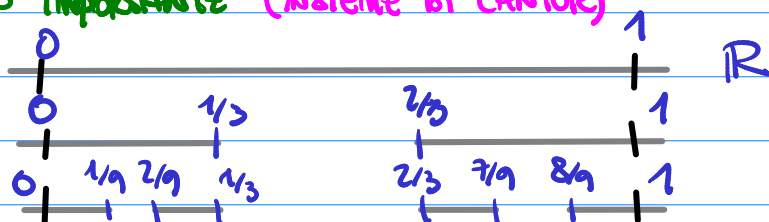
$$I(u|e_2 \cdot e_2 = I_{22}(u) = 1$$

Def.

se $P(x)$ è vera $\forall x \in E \setminus F$ con $|F|=0$

diremo che $P(x)$ è vera quasi ovunque (q.o.) in E .

ESEMPIO IMPORTANTE (insieme di CANTOR)



$$I_0 = [0, 1]$$

$$I_1 = [0, 1] \setminus (1/3, 2/3)$$

$$I_2 = I_1 \setminus ((1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9))$$

1. I_k è composto da 2^k intervalli, quindi è misurabile

$$I_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{e} \quad I_k \supseteq I_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|I_\infty| = \lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

I_k è composto da 2^k intervalli di lunghezza $\frac{1}{3^k} \Rightarrow |I_k| = \frac{2^k}{3^k}$

$[0, 1] \ni p \Rightarrow p = 0, \dots$ base 3

per $p \in I_\infty$ il suo sviluppo ternario (in base 3) di p non contiene 1

0 0,02002...

1 0,20200...

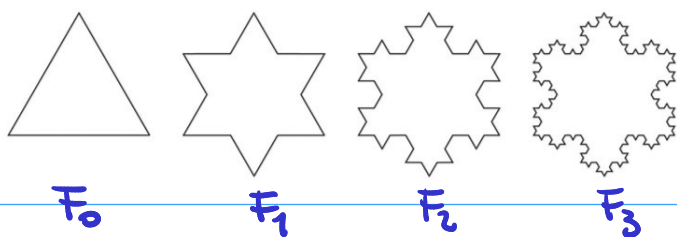
2

3

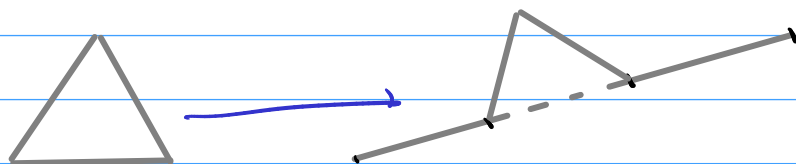
⋮

$\bar{p} = 0,20 \dots$ non è consentito tra i numeri "eterodici".

$\Rightarrow I_\infty$ non è numerabile



Fiocco di neve di Koch



$$F_{k+1} \supseteq F_k$$

$$F_{\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$$

$$|F_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} |F_{\infty}|$$

$$|F_0| = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad |F_1| = |F_0| + 3 \cdot \frac{1}{9} |F_0| = \frac{4}{3} |F_0|$$

$$l=1$$

$$|F_2| = |F_1| + 12 \cdot \frac{1}{81} |F_0| = \frac{4}{3} |F_0| + \frac{4}{27} |F_0|$$

$$|F_3| = |F_2| + 48 \cdot \frac{1}{3^6} |F_0| = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{27} + \frac{4^2}{3^5} \right) |F_0|$$

$$= \frac{4}{3} \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} \right] |F_0|$$

$$|F_k| = \frac{4}{3} |F_0| \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \dots + \frac{4^{k-2}}{9^{k-1}} \right]$$

ESERCIZIO 4. Si consideri la superficie

$$x(u, w) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2, -w + \frac{1}{3}w^3 - u^2w, u^2 - w^2 \right)$$

con $(u, w) \in K = \overline{B(0, 2)}$. Si verifichi che

i. (x, K) è una superficie regolare,

ii. $\partial_1 x(u, w)$ è sempre ortogonale a $\partial_2 x(u, w)$,

iii. $\Delta x_i(u, w) = 0$ per $i = 1, 2, 3$.

Infine si scriva il versore normale alla superficie.

$$\partial_1 x(u, w) = (1 - u^2 + w^2, -2uw, 2u)$$

$$\partial_2 x(u, w) = (2uw, -1 + w^2 - u^2, -2w)$$

$$\partial_1 x \cdot \partial_2 x = (2uw - 2u^3w + 2uw^3 + 2uw - 2uw^3 + 2u^3w - 4uw) = 0$$

$$x_1(u, w) = u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 x_1 &= 1 - u^2 + w^2, \quad \partial_{11} x_1 = -2u \\ \partial_2 x_1 &= 2uw, \quad \partial_{22} x_1 = 2u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_1(u, w) = -2u + 2u = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_3(u, w) &= u^2 - w^2, \quad \partial_1 x_3 = 2u, \quad \partial_{11} x_3 = 2 \\ \partial_2 x_3 &= -2w, \quad \partial_{22} x_3 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_3(u, w) = 0$$

$$\partial_1 x(u, w) = (1 - u^2 + w^2, -2uw, 2u)$$

$$\partial_2 x(u, w) = (2uw, -1 + w^2 - u^2, -2w)$$

$$\begin{aligned} (\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(u, w) &= (4uw^2 - 2u(1 + w^2 - u^2), 4u^2w + 2w(1 - u^2 + w^2), \\ &\quad (w^2 - u^2)^2 - 1 + 4u^2w^2) \\ &= (2u(1 + u^2 + w^2), 2w(1 + u^2 + w^2), (u^2 + w^2)^2 - 1) \end{aligned}$$

$$1. \quad x(u_1, w_1) = x(u_2, w_2) \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ e } w_1 = w_2$$

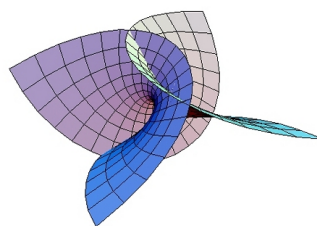
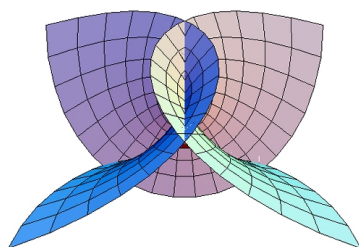
$$x(u, w) = \left(u \left(1 - \frac{1}{3}u^2 + w^2 \right), -w \left(1 - \frac{1}{3}w^2 + u^2 \right), u^2 - w^2 \right)$$

superficie di ENNEPER (superficie di SCHERK)

$$\begin{aligned} x(r, \theta) &= \left(r \cos(\theta) \left(1 - \frac{1}{3}r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \right), \right. \\ &\quad \left. -r \sin(\theta) \left(1 - \frac{1}{3}r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) \right), r^2 \cos(2\theta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= r^2 \cos^2(\theta) \left(1 - \frac{1}{3}r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \right)^2 + r^2 \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{1}{3}r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) \right)^2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

SI VEDA IL PDF DELLE SOLUZIONI



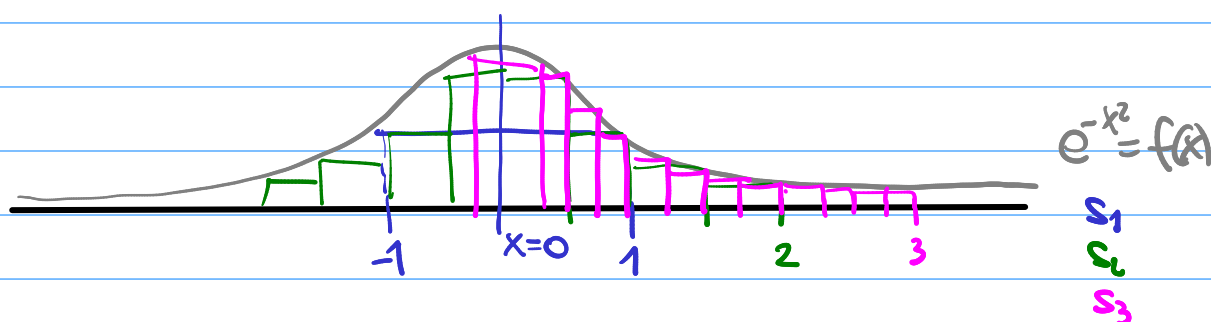
DEF. $E \subset \mathbb{R}^n$ diciamo che E è misurabile se è misurabile $\forall k \in \mathbb{N}$
 $E \cap B(0, k) =: E_k \quad |E| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |E_k|$

DEF. $\{E_i\}_{i=1, \dots, N}$ insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$, e $\{c_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}$
 $\left(\begin{array}{l} E_i \cap E_j = \emptyset \\ x \in E_j \end{array} \right)$ allora diciamo che $S(x) := \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$
 è una **funzione semplice**

DEF. Sia S è una funzione semplice, $c_i > 0 \forall i$, allora definiamo

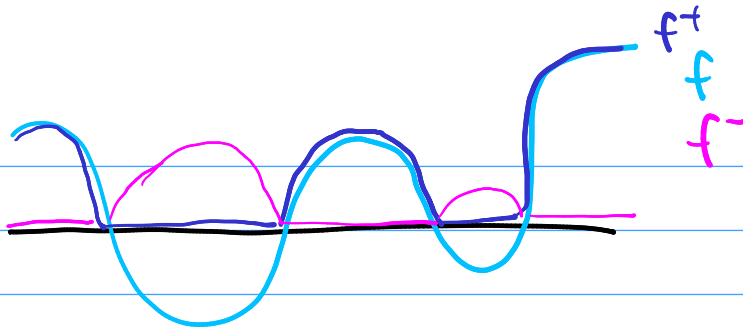
$$\int_{\mathbb{R}^n} S(x) dx := \sum_{i=1}^N c_i |E_i|$$

DEF. Diciamo che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non negativa è sommabile (secondo Lebesgue) se $\exists \{S_k\}$ funzioni semplici a coefficienti non negativi
 I. $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(x) \quad \text{q.o. } x$
 II. $\int_{\mathbb{R}^n} |S_k(x) - S_{k+p}(x)| dx \leq \varepsilon \quad \text{se } k \geq k_0(\varepsilon)$



oss. Ogni funzione continua (non negativa) è sommabile (secondo Lebesgue)

DEF. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
 $f^+(x) := \max \{f(x), 0\}$ parte positiva di f
 $f^-(x) := \max \{-f(x), 0\}$ parte negativa di f



$$\forall f \Rightarrow f^+(x), f^-(x) \geq 0 \quad \forall x \quad \begin{aligned} f(x) &= f^+(x) - f^-(x) \\ |f(x)| &= f^+(x) + f^-(x) \end{aligned}$$

DEF. Sia $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow f^+(x), f^-(x)$

I. se $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx, \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx < +\infty$ diremo che f è summabile secondo Lebesgue e poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx,$$

II. se $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx$ o $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx = +\infty$ diremo che f è integrabile

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \pm \infty,$$

III. se $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx = +\infty$ diremo che f è misurabile.