Capitolo 5

La misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

1 Introduzione. Plurintervalli in $\mathbf{R}^n$

Lo scopo di questo e del prossimo capitolo è di esporre le linee generali della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue.

Abbiamo già studiato nel volume 1 (cap. 4) l'integrale di Riemann per le funzioni di una variabile. Questa teoria, che ha il notevole pregio della semplicità, non è però del tutto soddisfacente, sia perché un largo gruppo di funzioni non sono integrabili secondo Riemann, sia soprattutto per la scarsa flessibilità dell'integrale di Riemann per quanto riguarda il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Al contrario, la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, che noi tratteremo nel seguito, è completamente esente da queste carenze, pur conservando in gran parte le caratteristiche di semplicità della teoria di Riemann.

In questo capitolo studieremo la teoria della misura in $\mathbf{R}^n$. La misura di un insieme verrà definita per gradi: per prima cosa si considereranno rettangoli e plurirettangoli (unione di un numero finito di rettangoli); quindi si definirà la misura di insiemi aperti approssimandoli dall'interno con plurirettangoli, e di insiemi compatti, mediante un'approssimazione dall'esterno. Infine introdurremo la misura di insiemi generali, approssimandoli contemporaneamente dall'interno con insiemi compatti e dall'esterno con insiemi aperti.

Un *intervallo n-dimensionale* $I \subset \mathbf{R}^n$ (vedi fig. 5.1) è il prodotto cartesiano di n intervalli unidimensionali $J_1, J_2, ..., J_n$

$$I = J_1 \times J_2 \times ... \times J_n .$$

In forma più esplicita, se $J_1 = [a_1, b_1]$, $J_2 = [a_2, b_2]$, ..., $J_n = [a_n, b_n]$, si avrà

$$I = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, ..., a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}.$$

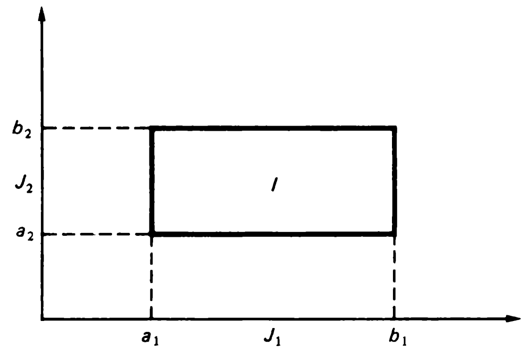

Figura 5.1

La misura di un intervallo I è semplicemente il prodotto delle misure degli intervalli $J_1, J_2, \ldots, J_n$

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n).$$

La misura così definita è la naturale generalizzazione a $\mathbf{R}^n$ della misura elementare di un rettangolo.

Il secondo stadio è costituito dalla misura dei plurirettangoli. Su ogni asse coordinato fissiamo un numero finito di punti; siano $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{k_1}^{(1)}$ quelli sull'asse x_1, $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_{k_2}^{(2)}$ quelli sull'asse x_2, e così via (vedi fig. 5.2).

Consideriamo poi gli iperpiani di equazione

$$\begin{array}{llll} x_1 = a_1^{(1)}, & x_1 = a_2^{(1)}, & \ldots, & x_1 = a_{k_1}^{(1)} \\ x_2 = a_1^{(2)}, & x_2 = a_2^{(2)}, & \ldots, & x_2 = a_{k_2}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_n = a_1^{(n)}, & x_n = a_2^{(n)}, & \ldots, & x_n = a_{k_n}^{(n)}. \end{array}$$

L'unione di questi $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ iperpiani si dirà un *reticolato* in $\mathbf{R}^n$.

Un reticolato $\mathscr{P}$ divide $\mathbf{R}^n$ in un numero finito di intervalli chiusi, che chiameremo *intervalli di* $\mathscr{P}$, più un certo numero di insiemi illimitati.

Definizione 1.1 *Un insieme Y si chiama plurintervallo (o plurirettangolo) se esiste un reticolato $\mathscr{P}$ tale che Y sia l'unione di un numero finito di intervalli di $\mathscr{P}$.*

Se $I_1, I_2, \ldots, I_N$ sono intervalli di un reticolato $\mathscr{P}$ e se

$$Y = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_N,$$

si pone

$$m(Y) = m(I_1) + m(I_2) + \cdots + m(I_N). \qquad [1.1]$$

Poiché uno stesso plurintervallo Y può essere rappresentato in più modi, a partire da reticolati diversi, è necessario far vedere che la misura di Y data dalla [1.1] non dipende dalla scelta del reticolato $\mathscr{P}$.

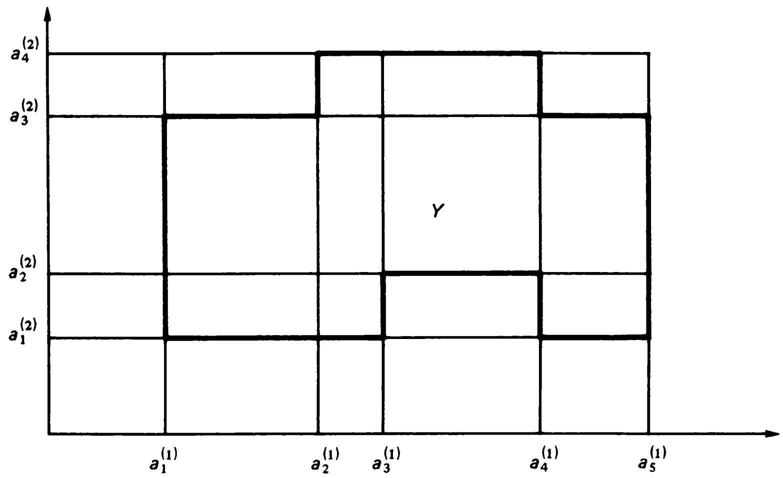

Figura 5.2

Chiameremo $\mathscr{P}'$ *raffinamento* di $\mathscr{P}$ se $\mathscr{P}' \supset \mathscr{P}$, cioè se in $\mathscr{P}'$ ci sono tutti gli iperpiani che compaiono in $\mathscr{P}$, più eventuali altri. E' chiaro che la misura di Y non cambia se si sostituisce a $\mathscr{P}$ il reticolato $\mathscr{P}'$ ottenuto aggiungendo a $\mathscr{P}$ un iperpiano. Per induzione si vede che la misura di Y non cambia se si sostituisce a $\mathscr{P}$ un suo raffinamento.

Siano ora $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ due reticolati tali che Y si possa scrivere come unione di intervalli di $\mathscr{P}_1$ e anche come unione di intervalli di $\mathscr{P}_2$. Poiché $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ è un raffinamento sia di $\mathscr{P}_1$ che di $\mathscr{P}_2$, la misura di Y, calcolata col reticolato $\mathscr{P}_1$, è uguale a quella calcolata con il reticolato $\mathscr{P}_2$, in quanto ambedue coincidono con la misura calcolata con il reticolato $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$. ■

Con lo stesso ragionamento si conclude che due plurintervalli Y e Z si possono sempre scrivere come unione di intervalli dello stesso reticolato. Ne segue che $Y \cup Z$ è un plurintervallo e che

$$\mathrm{m}(Y \cup Z) \leqslant \mathrm{m}(Y) + \mathrm{m}(Z). \qquad [1.2]$$

In particolare, se $Y \cap Z = \varnothing$, si ha

$$\mathrm{m}(Y \cup Z) = \mathrm{m}(Y) + \mathrm{m}(Z).$$

Esercizi

1.1 Siano I e J due intervalli. Dimostrare che se I e J hanno punti interni in comune, allora $I \cap J$ è un intervallo.

1.2 Siano $Y = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_N$ e $Z = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_M$ due plurintervalli. Supponiamo che per ogni $h = 1, 2, \ldots, N$ e $k = 1, 2, \ldots, M$ l'insieme $I_h \cap J_k$ sia o vuoto o un intervallo. Si dimostri che $Y \cap Z$ è un plurintervallo.

1.3 Sia I un intervallo. Dimostrare che: (a) per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intervallo J tale che $I \subset J^0$ (J^0 è la parte interna di $J: J^0 = J - \partial J$) e che

$$m(J) < m(I) + \epsilon.$$

1.4 Sia Y un plurintervallo. Si dimostri che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un plurintervallo Z con $Y \subset Z^0$ e tale che $m(Z) < m(Y) + \epsilon$; (b) per ogni $\epsilon > 0$ esiste un plurintervallo W con $W \subset Y^0$ e tale che $m(W) > m(Y) - \epsilon$.

1.5 Dimostrare che se Y e Z sono due plurirettangoli, con $Y \subset Z$, allora $m(Y) \leqslant m(Z)$.

1.6 Dimostrare che se Y e Z sono due plurirettangoli, con $Y \supset Z$, allora la chiusura di $Y - Z$ è un plurirettangolo, e si ha

$$m(\overline{Y - Z}) = m(Y) - m(Z).$$

2 Insiemi misurabili: misura di un insieme

Come abbiamo detto, il secondo gradino consiste nel definire la misura per insiemi aperti e per insiemi compatti.

Definizione 2.1 *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$. Si definisce misura di A l'estremo superiore delle misure dei plurirettangoli contenuti in A:*

$$m(A) = \sup \{m(Y);\ Y \text{ plurintervallo},\ Y \subset A\}.$$

Si noti che è possibile che risulti $m(A) = +\infty$; ad esempio $m(\mathbf{R}^n) = +\infty$. Se però A è limitato, cioè A è contenuto in un rettangolo di $\mathbf{R}^n$, allora $m(A) < +\infty$ (vedi esercizio 1.5).

Lemma 2.1 *Siano A e B due aperti e sia K un compatto contenuto in $A \cup B$; esiste un numero $d > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x} \in K$, l'intorno $I(\mathbf{x}, d)$ è tutto contenuto in A o in B.*

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni

$$f(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{R}^n - A) \quad \text{e} \quad g(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{R}^n - B).$$

Le funzioni f e g sono continue, e si ha $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) > 0$ in K.

Poiché K è compatto, $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ avrà un minimo positivo in K.

Sia c tale minimo e sia $d = c/2$. Per ogni $\mathbf{x} \in K$ risulterà $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \geqslant 2d$, e dunque dovrà essere $f(\mathbf{x}) \geqslant d$, oppure $g(\mathbf{x}) \geqslant d$.

Nel primo caso si ha $I(\mathbf{x}, d) \subset A$; nel secondo $I(\mathbf{x}, d) \subset B$. ∎

Lemma 2.2 *Siano A e B due aperti. Allora*

$$m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B). \qquad [2.2]$$

Dimostrazione. Sia W un plurintervallo contenuto in $A \cup B$. Poiché W è compatto, si può applicare il lemma precedente con $K = W$. Sia d come nel lemma 2.1; raffinando eventualmente il reticolato si può supporre che ogni intervallo di W abbia diametro minore di d. Per il lemma 2.1 ogni intervallo di W è contenuto in A o in B.

Sia Y l'unione di tutti gli intervalli di W contenuti in A, e sia Z l'unione di quelli contenuti in B. Per quanto detto sopra risulta $W = Y \cup Z$ e dunque

$$\mathrm{m}(W) \leqslant \mathrm{m}(Y) + \mathrm{m}(Z).$$

Poiché $Y \subset A$ e $Z \subset B$, si ha $\mathrm{m}(Y) \leqslant \mathrm{m}(A)$ e $\mathrm{m}(Z) \leqslant \mathrm{m}(B)$, e quindi

$$\mathrm{m}(W) \leqslant \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B)$$

per ogni plurirettangolo $W \subset A \cup B$. Da questa segue immediatamente la [2.2]. ■

Passiamo ora alla definizione della misura per insiemi compatti.

Definizione 2.2 *Sia K un compatto di $\mathbf{R}^n$. Si definisce misura di K l'estremo inferiore delle misure dei plurirettangoli che contengono K:*

$$\mathrm{m}(K) = \inf \{\mathrm{m}(Z); Z \textit{ plurintervallo}, Z \supset K\}. \tag{2.3}$$

Osservazione 2.1. Ricordando l'esercizio 1.4 si vede facilmente che

$$\mathrm{m}(K) = \inf \{\mathrm{m}(Z); Z \text{ plurintervallo}, Z^0 \supset K\}, \tag{2.4}$$

dove al solito indichiamo con Z^0 la parte interna di Z. ■

Lemma 2.3 *Siano K e L due compatti disgiunti ($K \cap L = \varnothing$). Allora*

$$\mathrm{m}(K \cup L) \geqslant \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L). \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Se $f(\mathbf{x}) = \mathrm{dist}(\mathbf{x}, L)$ si ha $f(\mathbf{x}) > 0$ in K, e dunque f ha un minimo positivo d in K. Sia W un plurirettangolo che contiene $K \cup L$. Raffinando eventualmente il reticolato si può supporre che tutti gli intervalli di W abbiano diametro minore di $d/2$.

Se si indica con Y l'unione degli intervalli di W che hanno punti in comune con K e con Z l'unione di quelli che hanno punti in comune con L, risulta

$$Y \cup Z \subset W, \quad Y \cap Z = \varnothing,$$

e inoltre

$$K \subset Y, \quad L \subset Z.$$

Allora

$$\mathrm{m}(W) \geqslant \mathrm{m}(Y \cup Z) = \mathrm{m}(Y) + \mathrm{m}(Z) \geqslant \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L),$$

da cui segue immediatamente la [2.5]. ■

Notiamo che il lemma 2.3 ci serve solo come risultato intermedio. In realtà nella [2.5] vale sempre il segno "=", come si vedrà nel corollario 2.1.

Una volta definita la misura degli aperti e dei compatti si possono considerare insiemi di $\mathbf{R}^n$ arbitrari.

Definizione 2.3 *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Si chiama misura esterna di E l'estremo inferiore delle misure degli aperti che contengono E:*

$$\overline{\mathrm{m}}(E) = \inf\{\mathrm{m}(A), A \text{ aperto}, A \supset E\}. \tag{2.6}$$

Analogamente, si chiama misura interna di E l'estremo superiore delle misure dei compatti contenuti in E:

$$\underline{\mathrm{m}}(E) = \sup\{\mathrm{m}(K), K \text{ compatto}, K \subset E\}. \tag{2.7}$$

Se E non è limitato può accadere che per ogni aperto $A \supset E$ risulti $\mathrm{m}(A) = +\infty$. In tal caso si porrà $\overline{\mathrm{m}}(E) = +\infty$.

Osservazione 2.2. Si noti che si potrebbe usare solo la misura esterna e definire la misura interna per mezzo di questa. Se E è un insieme limitato (ci si può limitare a considerare tali insiemi; vedi più oltre, § 4) basterà prendere un intervallo $I \supset E$ e definire

$$\underline{\mathrm{m}}(E) = \mathrm{m}(I) - \overline{\mathrm{m}}(I - E).$$

Si può dimostrare facilmente che la misura così ottenuta non dipende dalla scelta dell'intervallo I. ■

Lemma 2.4 *Se A è un aperto e K è un compatto contenuto in A, esiste un plurirettangolo W tale che $K \subset W \subset A$.*

La dimostrazione di questo lemma viene lasciata per esercizio. (Si proceda come nelle dimostrazioni dei lemmi 2.1 e 2.3.) Da esso segue facilmente la

Proposizione 2.1 *Per ogni insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ risulta*

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \underline{\mathrm{m}}(E). \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Sia K un compatto e A un aperto con $K \subset E \subset A$. Per il lemma precedente esiste un plurintervallo W con $K \subset W \subset A$. Ricordando le definizioni 2.1 e 2.2, si conclude che

$$\mathrm{m}(K) \leqslant \mathrm{m}(A)$$

per ogni compatto $K \subset E$ e per ogni aperto $A \supset E$, e quindi vale la [2.8]. ■

Se A è aperto, si ha evidentemente $\overline{\mathrm{m}}(A) = \mathrm{m}(A)$; d'altra parte i plurintervalli sono compatti, e dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{m}(A) &= \sup\{\mathrm{m}(Y),\ Y \text{ plurintervallo},\ Y \subset A\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\mathrm{m}(K),\ K \text{ compatto},\ K \subset A\} = \underline{\mathrm{m}}(A).\end{aligned}$$

Ricordando la proposizione 2.1, si ha

$$\underline{\mathrm{m}}(A) = \overline{\mathrm{m}}(A) = \mathrm{m}(A). \qquad [2.9]$$

In maniera analoga, tenendo conto dell'osservazione 2.1, si dimostra che

$$\underline{\mathrm{m}}(K) = \overline{\mathrm{m}}(K) = \mathrm{m}(K) \qquad [2.10]$$

per ogni compatto $K \subset \mathbf{R}^n$.

Possiamo ora dare la definizione di insieme misurabile, e di misura di un insieme.

Definizione 2.4 *Un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ si dice misurabile (secondo Lebesgue) se la misura esterna e la misura interna di E sono uguali e finite. In tal caso il numero*

$$\mathrm{m}(E) = \overline{\mathrm{m}}(E) = \underline{\mathrm{m}}(E)$$

si chiama misura di Lebesgue n*-dimensionale (o più brevemente misura) di E.*

A volte può essere opportuno, per evitare confusioni, scrivere $\mathrm{m}_n(E)$, e anche $\overline{\mathrm{m}}_n(E)$ e $\underline{\mathrm{m}}_n(E)$, indicando così esplicitamente la dimensione dello spazio in cui si esegue la misura.

Dalla discussione precedente segue che *gli insiemi aperti limitati e gli insiemi compatti di $\mathbf{R}^n$ sono misurabili.* Comunque la classe degli insiemi misurabili è molto più vasta: gli esempi di insiemi limitati non misurabili sono ottenuti tutti in maniera indiretta e non costruttiva (vedi esempio 3.4).

Osservazione 2.3. Nella teoria della misura dovuta a Peano e Jordan (precedente a quella di Lebesgue) la misura esterna e la misura interna di un insieme E vengono definite mediante plurirettangoli:

$$\overline{\mu}(E) = \inf\{\mathrm{m}(Y),\ Y \text{ plurirettangolo},\ Y \supset E\}$$

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{\mathrm{m}(Z),\ Z \text{ plurirettangolo},\ Z \subset E\}$$

e si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) un insieme E per il quale le due misure coincidono (e sono finite).

Tenendo presente l'osservazione 2.1, si vede facilmente che un insieme misurabile secondo Peano-Jordan lo è anche secondo Lebesgue, e le misure coincidono. Il viceversa però non è vero; ad esempio esistono aperti limitati che non sono misurabili secondo Peano-Jordan.

La ragione per cui la misura di Peano-Jordan è meno raffinata di quella di Lebesgue risiede, a ben vedere, nella proprietà (b) dei plurintervalli stabilita nell'esercizio 1.4, in virtù della quale si può dimostrare facilmente che

$$\mu(E)=\sup\{\mathrm{m}(Z), Z \text{ plurirettangolo}, Z\subset E^0\},$$

e dunque

$$\mu(E)=\mu(E^0).$$

Analogamente si dimostra che $\overline{\mu}(E)=\overline{\mu}(\overline{E})$, e dunque un insieme E è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se lo sono anche il suo interno e la sua chiusura, e le misure di tutti questi insiemi coincidono; in altre parole se e solo se la sua frontiera ∂E ha misura nulla.

A ben vedere, la misura di Peano-Jordan consiste nell'approssimare E dall'interno con aperti e dall'esterno con compatti. Ora è chiaro che in tal modo la frontiera di E entrerà sempre nel calcolo della misura esterna e mai in quella della misura interna. Al contrario, approssimando dall'interno con compatti e dall'esterno con aperti si possono prendere in ogni caso quelle parti di ∂E che appartengono a E ed escludere le altre. Di qui la maggior duttilità della misura di Lebesgue. ■

Segue immediatamente dalla definizione la seguente

Proposizione 2.2 *Un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\epsilon>0$ esistono un aperto A e un compatto K, con $K\subset E\subset A$ tali che*

$$\mathrm{m}(A)-\mathrm{m}(K)<\epsilon.$$

Analogo ai lemmi 2.2 e 2.3 è il seguente

Lemma 2.5 *Siano E e F due insiemi di $\mathbf{R}^n$; risulta*

$$\overline{\mathrm{m}}(E\cup F)\leqslant\overline{\mathrm{m}}(E)+\overline{\mathrm{m}}(F). \qquad [2.11]$$

Inoltre, se $E\cap F=\emptyset$, si ha

$$\underline{\mathrm{m}}(E\cup F)\geqslant\underline{\mathrm{m}}(E)+\underline{\mathrm{m}}(F). \qquad [2.12]$$

Dimostrazione. Se $\overline{\mathrm{m}}(E)+\overline{\mathrm{m}}(F)=+\infty$, la [2.11] è evidente. Si può allora supporre che le misure esterne di E e di F siano ambedue finite. Per $\epsilon>0$ siano A e B due aperti, con $E\subset A$ e $F\subset B$ e tali che

$$\mathrm{m}(A)<\overline{\mathrm{m}}(E)+\epsilon,\quad \mathrm{m}(B)<\overline{\mathrm{m}}(F)+\epsilon.$$

Ricordando il lemma 2.2,

$$\overline{\mathrm{m}}(E\cup F)\leqslant\mathrm{m}(A\cup B)\leqslant\mathrm{m}(A)+\mathrm{m}(B),$$

e quindi

$$\overline{\mathrm{m}}(E \cup F) \leqslant \overline{\mathrm{m}}(E) + \overline{\mathrm{m}}(F) + 2\epsilon.$$

Poiché quest'ultima relazione vale per ogni $\epsilon > 0$ si ricava la [2.11].

In maniera analoga, usando il lemma 2.3, si dimostra la [2.12]. ∎

Se gli insiemi E e F sono misurabili e disgiunti (cioè $E \cap F = \varnothing$), combinando le [2.11] e [2.12] si ottiene immediatamente la relazione

$$\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F). \qquad [2.13]$$

In particolare se A è un aperto e K un compatto contenuto in A, $A - K$ è un aperto (dunque è misurabile) e dalla [2.13] con $E = K$ e $F = A - K$ si ottiene

$$\mathrm{m}(A - K) = \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(K).$$

Con un semplice ragionamento per induzione si dimostrano le analoghe delle [2.11] e [2.12] per un numero finito di insiemi, e di qui il seguente

Corollario 2.1 *Sia dato un numero finito di insiemi misurabili a due a due disgiunti* $E_1, E_2, \ldots, E_n$*; in tal caso la loro unione è misurabile e si ha*

$$\mathrm{m}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N) = \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) + \cdots + \mathrm{m}(E_N). \qquad [2.14]$$

Teorema 2.1 *Dati due insiemi misurabili* E *ed* F*, anche* $E \cup F$, $E \cap F$ *e* $E - F$ *sono misurabili.*

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che $E - F$ è misurabile. Sia $\epsilon > 0$ e siano A, A' due aperti e K, K' due compatti, con

$$K \subset E \subset A, \quad K' \subset F \subset A',$$

e tali che

$$\mathrm{m}(A - K) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \mathrm{m}(A' - K') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se si pone

$$B = A - K' \quad \text{e} \quad L = K - A',$$

B è un aperto, L è un compatto e inoltre

$$L \subset E - F \subset B.$$

D'altra parte $B - L$ è aperto, e

$$B - L \subset (A - K) \cup (A' - K'),$$

cosicché, per il lemma 2.2,

$$\mathrm{m}(B - L) \leqslant \mathrm{m}(A - K) + \mathrm{m}(A' - K') < \epsilon.$$

In definitiva per ogni $\epsilon>0$ abbiamo trovato un aperto B e un compatto L con $L\subset E-F\subset B$, e $\mathrm{m}(B)-\mathrm{m}(L)=\mathrm{m}(B-L)<\epsilon$. Per la proposizione 2.2 l'insieme $E-F$ risulta dunque misurabile.

Per quanto riguarda $E\cap F$ si osservi che

$$E\cap F=E-(E-F),$$

cosicché, in virtù di quanto appena dimostrato, l'insieme $E\cap F$ sarà misurabile non appena lo siano E e F.

Infine si ha

$$E\cup F=E\cup(F-E) \qquad [2.15]$$

e i due insiemi a secondo membro sono misurabili e disgiunti. Per il corollario 2.1 la loro unione è misurabile, e il teorema è completamente dimostrato. ■

Osservazione 2.4. Dalle [2.13] e [2.15] segue

$$\mathrm{m}(E\cup F)=\mathrm{m}(E)+\mathrm{m}(F-E).$$

D'altra parte si ha $F=(F-E)\cup(F\cap E)$, e dunque:

$$\mathrm{m}(F)=\mathrm{m}(F-E)+\mathrm{m}(F\cap E).$$

Confrontando, si ottiene la relazione

$$\mathrm{m}(E)+\mathrm{m}(F)=\mathrm{m}(E\cup F)+\mathrm{m}(E\cap F), \qquad [2.16]$$

valida per ogni coppia di insiemi E e F misurabili. ■

Esercizi

2.1 Dimostrare che se E, F e G sono misurabili, allora

$$\mathrm{m}(E\cup F\cup G)=\mathrm{m}(E)+\mathrm{m}(F)+\mathrm{m}(G)-\mathrm{m}(E\cap F)-\mathrm{m}(E\cap G)-\mathrm{m}(F\cap G)+\\+\mathrm{m}(E\cap F\cap G).$$

2.2 Dimostrare la proposizione 2.2.

2.3˙ Sia $S\subset\mathbf{R}^2$ il segmento

$$S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

Dimostrare che S è misurabile, e che $\mathrm{m}_2(S)=0$.

2.4 Si dimostri che la misura del triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, a)$ e $(b, 0)$ è uguale all'area elementare definita

$$\mathrm{m}(T)=\frac{ab}{2}.$$

2.5 Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva nell'intervallo $[0, 1]$; l'insieme

$$F=\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

è compatto e dunque misurabile. Si dimostri che

$$\mathrm{m}(F)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.6 Dimostrare che l'insieme costituito da un solo punto è misurabile e ha misura nulla.

***2.7** Sia E un insieme misurabile di $\mathbf{R}^n$ e sia $t>0$; si ponga

$$tE=\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}/t\in E\}.$$

Si dimostri che tE è misurabile, e che

$$\mathrm{m}(tE)=t^n\,\mathrm{m}(E).$$

(Si dia la dimostrazione per gli intervalli, poi per i plurintervalli ecc.)

2.8 Sia E un insieme misurabile e sia $\mathbf{v}\in \mathbf{R}^n$. Si dimostri che l'insieme

$$\tau_{\mathbf{v}}E=\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}-\mathbf{v}\in E\}$$

è misurabile e si ha

$$\mathrm{m}(\tau_{\mathbf{v}}E)=\mathrm{m}(E).$$

2.9 Si dimostri che, se $E\subset F$, allora

$$\overline{\mathrm{m}}(E)\leqslant\overline{\mathrm{m}}(F),$$

$$\underline{\mathrm{m}}(E)\leqslant\underline{\mathrm{m}}(F).$$

***2.10** Dimostrare che se A è un aperto limitato di $\mathbf{R}^2$, esiste una successione di plurintervalli $Y_1\subset Y_2\subset\ldots$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i=A$. (Si metta A in un quadrato, e si suddivida prima in quattro quadrati uguali, poi ognuno di questi in quattro quadratini uguali ecc. Alla k-esima suddivisione si denoti con Y_k l'unione di tutti i quadratini contenuti in A, ...) Generalizzare a $\mathbf{R}^n$.

2.11 Generalizzare il risultato precedente ad aperti non limitati.

2.12 Dimostrare che, se K è un compatto, esiste una successione $Z_1\supset Z_2\supset\ldots$ di plurintervalli, con $\bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i=K$.

3 Additività e subadditività numerabile della misura

Lo scopo di questo paragrafo è di estendere a una infinità numerabile di insiemi i risultati del paragrafo precedente, relativi alla misura dell'unione di due o di un numero finito di insiemi.

Lemma 3.1 *Sia data una famiglia numerabile di insiemi aperti,* $A_1, A_2, \ldots$, *e sia*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i;$$

allora

$$\mathrm{m}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_k). \tag{3.1}$$

Se poi si ha $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, *risulta*

$$\mathrm{m}(A) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{m}(A_k). \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Sia Y un plurintervallo contenuto in A. Poiché Y è compatto e la famiglia $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ è un ricoprimento di Y, esisterà una sottofamiglia finita che ricopre Y (vedi cap. 1, teorema 6.1). Esiste dunque un intero j tale che

$$Y \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j. \tag{3.3}$$

Per il lemma 2.2 si avrà allora

$$\mathrm{m}(Y) \leqslant \sum_{k=1}^{j} \mathrm{m}(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_k).$$

Poiché questa disuguaglianza sussiste per ogni plurintervallo $Y \subset A$, si ha immediatamente la [3.1].

Se poi $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, segue dalla [3.3] che

$$Y \subset A_j,$$

e quindi

$$\mathrm{m}(Y) \leqslant \mathrm{m}(A_j) \leqslant \sup_{j \in \mathbf{N}} \mathrm{m}(A_j).$$

D'altra parte la successione $\mathrm{m}(A_j)$ è crescente, per cui

$$\mathrm{m}(Y) \leqslant \sup_{j \in \mathbf{N}} \mathrm{m}(A_j) = \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}(A_j),$$

e infine

$$\mathrm{m}(A) \leqslant \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}(A_j).$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, osserviamo che $A_j \subset A$, e dunque $\mathrm{m}(A_j) \leqslant \mathrm{m}(A)$ per ogni $j \in \mathbf{N}$; quindi

$$\mathrm{m}(A) \geqslant \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}(A_j),$$

che, confrontata con la precedente, dà la [3.2]. ■

Passiamo ora a considerare le misure esterna e interna.

Proposizione 3.1 *Sia* $E_1, E_2, \ldots$ *una famiglia numerabile di insiemi di* $\mathbf{R}^n$, *e sia*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Si ha

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{m}}(E_i). \tag{3.4}$$

Inoltre, se gli insiemi E_i *sono a due a due disgiunti, risulta*

$$\underline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\mathrm{m}}(E_i). \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Cominciamo dalla [3.4]. Se il secondo membro è $+\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Si potrà supporre dunque che tutte le misure esterne degli E_i siano finite.

Sia $\epsilon > 0$, e per ogni $i \in \mathbf{N}$ sia A_i un aperto che contiene E_i e tale che

$$\mathrm{m}(A_i) < \overline{\mathrm{m}}(E_i) + \epsilon 2^{-i}.$$

Se si pone

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

risulta $E \subset A$ e quindi $\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \mathrm{m}(A)$. Per il lemma 3.1,

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(A_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{m}}(E_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i},$$

e quindi

$$\overline{\mathrm{m}}(E) < \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{m}}(E_i) + \epsilon.$$

Poiché questa disuguaglianza è vera per ogni $\epsilon > 0$, la [3.4] è dimostrata.

Per quanto riguarda la [3.5], si osservi che, per ogni intero k,

$$E \supset \bigcup_{i=1}^{k} E_i,$$

e dunque, ricordando il lemma 2.5,

$$\underline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \underline{\mathrm{m}}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \underline{\mathrm{m}}(E_i),$$

da cui segue la [3.5] passando al limite per $k \to +\infty$. ∎

Nel caso in cui gli insiemi E_i formino una successione crescente (cioè verifichino la relazione $E_1 \subset E_2 \subset \dots$), vale la seguente:

Proposizione 3.2 *Sia* $\{E_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ *una famiglia numerabile di insiemi di* $\mathbf{R}^n$, *con* $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ *e sia*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i;$$

in tal caso

$$\overline{\mathrm{m}}(E) = \lim_{i \to \infty} \overline{\mathrm{m}}(E_i). \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente, sia $\epsilon > 0$ e per ogni i sia A_i un aperto contenente E_i e tale che

$$\mathrm{m}(A_i) < \overline{\mathrm{m}}(E_i) + \epsilon 2^{-i}.$$

Gli insiemi A_i non sono in generale contenuti l'uno nel successivo, e quindi non si può applicare la [3.2]. Per ovviare a questo inconveniente poniamo

$$B_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

e facciamo vedere che si ha

$$\mathrm{m}(B_k) < \overline{\mathrm{m}}(E_k) + \epsilon \sum_{i=1}^{k} 2^{-i}. \tag{3.7}$$

La [3.7] è vera per $k = 1$; supponiamola vera per k e dimostriamola per $k + 1$. Poiché $B_{k+1} = B_k \cup A_{k+1}$, si ha

$$\mathrm{m}(B_{k+1}) = \mathrm{m}(B_k) + \mathrm{m}(A_{k+1}) - \mathrm{m}(B_k \cap A_{k+1}).$$

Osserviamo ora che $E_k \subset B_k \cap A_{k+1}$, e dunque $\overline{\mathrm{m}}(E_k) \leqslant \mathrm{m}(B_k \cap A_{k+1})$. Dalla [3.7] per k segue allora

$$\mathrm{m}(B_{k+1}) < \overline{\mathrm{m}}(E_k) + \epsilon \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} + \overline{\mathrm{m}}(E_{k+1}) + 2^{-k-1}\epsilon - \overline{\mathrm{m}}(E_k),$$

e quindi la [3.7] per $k + 1$.

In questo modo la [3.7] è dimostrata; da essa segue immediatamente

$$\mathrm{m}(B_k) < \overline{\mathrm{m}}(E_k) + \epsilon.$$

Se ora si pone

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

risulterà $B \supset E$; ricordando la [3.2],

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \mathrm{m}(B) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{m}(B_k) \leqslant \lim_{k \to \infty} \overline{\mathrm{m}}(E_k) + \epsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ϵ si trova

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \lim_{k \to \infty} \overline{\mathrm{m}}(E_k).$$

D'altra parte, $E \supset E_k$ e dunque $\overline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \overline{\mathrm{m}}(E_k)$; passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \lim_{k \to \infty} \overline{\mathrm{m}}(E_k),$$

che, confrontata con la precedente, dà la tesi. ∎

Nel caso che gli insiemi considerati siano misurabili, si hanno i seguenti importanti risultati.

Teorema 3.1 (additività numerabile della misura) *Sia* $E_1, E_2, \ldots$ *un'infinità numerabile di insiemi misurabili, a due a due disgiunti. Sia*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

e si supponga che $\overline{\mathrm{m}}(E) < +\infty$. *Allora E è misurabile e si ha*

$$\mathrm{m}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i). \qquad [3.8]$$

Dimostrazione. Per la proposizione 3.1,

$$\overline{\mathrm{m}}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{m}}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i)$$

e

$$\underline{\mathrm{m}}(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\mathrm{m}}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i),$$

da cui si ottiene

$$\underline{\mathrm{m}}(E) = \overline{\mathrm{m}}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i). \blacksquare$$

Teorema 3.2 (subadditività numerabile della misura) *Sia* $E_1, E_2, \ldots$ *una famiglia numerabile di insiemi misurabili, e sia*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Se $\overline{\mathrm{m}}(E) < +\infty$, *allora E è misurabile, e*

$$\mathrm{m}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i). \qquad [3.9]$$

Se poi $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, *si ha*

$$\mathrm{m}(E) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{m}(E_i). \qquad [3.10]$$

Dimostrazione. Si ponga

$$F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 - E_1, \qquad F_k = E_k - (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1}).$$

Gli insiemi F_i sono misurabili e a due a due disgiunti; inoltre, per ogni $i \in \mathbf{N}$, si ha $F_i \subset E_i$, e quindi $\mathrm{m}(F_i) \leqslant \mathrm{m}(E_i)$, cosicché

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i). \qquad [3.11]$$

D'altra parte E è l'unione degli F_i, cosicché per il teorema precedente E è misurabile e $\mathrm{m}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_i)$.

La [3.9] è allora conseguenza della [3.11].

Infine se $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, la [3.10] segue immediatamente dalla proposizione 3.2. ∎

Esempio 3.1

Se $E_1, E_2, \ldots$ è un'infinità numerabile di insiemi di misura nulla, la loro unione è misurabile, e ha misura nulla (teorema 3.2). In particolare, siccome un punto ha misura nulla, ogni insieme numerabile ha misura nulla. Così l'insieme Q dei numeri razionali compresi tra zero e uno, essendo numerabile, ha misura unidimensionale nulla.

Questo fatto può essere dimostrato direttamente nel modo seguente.

I numeri razionali compresi tra 0 e 1 possono essere posti in una successione $\{r_1, r_2, \ldots\}$. Per $\epsilon > 0$, l'insieme aperto

$$A_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} I(r_i, \epsilon 2^{-i-1})$$

contiene Q. Per il teorema 3.2, risulta

$$\mathrm{m}(A_\epsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(I(r_i, \epsilon 2^{-i-1})) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon 2^{-i} = \epsilon.$$

Ma allora $\overline{\mathrm{m}}(Q) = 0$ e dunque $\mathrm{m}(Q) = 0$. ∎

Esempio 3.2

L'insieme Q' dei numeri irrazionali compresi tra zero e uno ha misura 1. Infatti

$$Q' = [0, 1] - Q$$

e per il teorema 2.1 Q' è misurabile. Inoltre, poiché Q e Q' sono disgiunti si ha

$$1 = \mathrm{m}([0, 1]) = \mathrm{m}(Q) + \mathrm{m}(Q') = \mathrm{m}(Q'). \ ∎$$

Esempio 3.3. Un insieme compatto, non numerabile e di misura nulla: l'insieme di Cantor

Questo notevole insieme si costruisce nel modo seguente. Si parte dall'intervallo [0, 1], che si divide in tre parti uguali togliendo l'intervallo aperto centrale (1/3, 2/3); resta così l'insieme chiuso K_1, composto dei due intervalli [0, 1/3] e [1/3, 1], ognuno di ampiezza 1/3. Si continua ora dividendo ognuno degli intervalli chiusi che compongono K_1 in tre parti uguali, e togliendo l'intervallo centrale aperto; resterà un insieme chiuso K_2 composto di quattro intervalli chiusi, ognuno di ampiezza 1/9. Si prosegue sempre allo stesso modo; dopo m passi si otterrà un insieme compatto

$$K_m = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{2^m}$$

composto di 2^m intervalli chiusi, ognuno di ampiezza 3^{-m}, e dunque di misura totale:

$$\mathrm{m}(K_m) = \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

Risulta evidentemente $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m \supset \cdots$; posto allora

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i,$$

K è un insieme compatto, con (vedi esercizio 3.4)

$$\mathrm{m}(K) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{m}(K_i) = 0.$$

L'insieme K si dice *insieme di Cantor*. E' chiaro che K non contiene alcun intervallo; inoltre K ha la potenza del continuo (cioè può essere messo in corrispondenza biunivoca con un intervallo, vedi esercizio 3.2) e dunque non è numerabile. ■

Esempio 3.4. La funzione di Cantor

Strettamente legata all'insieme di Cantor è una funzione un po' patologica, detta *funzione* o anche *scala di Cantor*.

Per introdurla, descriviamo in primo luogo un'operazione sulle funzioni lineari definite in un intervallo. Sia $f(x)$ una funzione lineare nell'intervallo $[a, b]$, che assume i valori α e β ai due estremi a e b. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in tre parti uguali; la funzione trasformata $\tilde{f}(x)$ sarà definita ponendo $\tilde{f}(x) = (\alpha + \beta)/2$ nell'intervallo centrale e raccordando i valori linearmente negli intervalli laterali (vedi fig. 5.3). Notiamo che $\tilde{f}$ ha la stessa immagine di f, e dunque

$$\|\tilde{f} - f\|_\infty \leqslant |\beta - \alpha|,$$

mentre l'immagine (tramite $\tilde{f}$) di ognuno degli intervalli laterali ha ampiezza $|\beta - \alpha|/2$.

Ciò premesso, partiamo dalla funzione $f_0(x) = x$ nell'intervallo [0, 1] e operiamo nel modo detto; otterremo una funzione $f_1(x)$ che sarà costante nell'intervallo (1/3, 2/3) e lineare negli altri due. In ognuno di questi intervalli operiamo di nuovo come

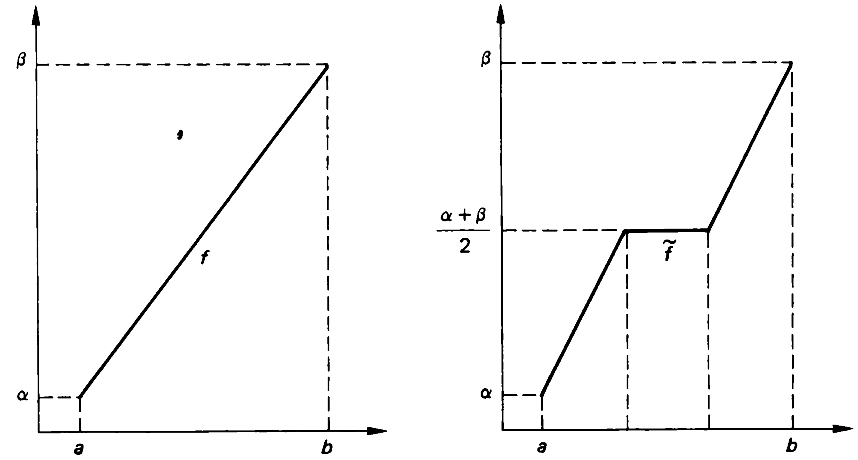

Figura 5.3

sopra, e così via. Dopo h passi otterremo una funzione f_h che sarà lineare in ognuno degli intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_{2^h}$ che compongono K_h, mentre sarà costante in ognuno degli intervalli che formano $[0, 1]-K_h$. Non è difficile vedere che l'immagine $f_h(I_s)$ di un qualsiasi intervallo I_s ha ampiezza $2^{-k}(\beta-\alpha)$.

Se ora m è un intero positivo, la funzione f_{h+m} sarà uguale alla f_h fuori di K_h, mentre in ognuno degli intervalli di K_h avrà la stessa immagine di f_h. Ne deriva

$$\|f_{h+m}-f_h\|_\infty \leqslant 2^{-h}.$$

La successione $\{f_h\}$ è dunque una successione di Cauchy; essa converge uniformemente a una funzione continua $f(x)$, detta *funzione di Cantor*.

La funzione di Cantor è una funzione crescente, dato che è limite di funzioni crescenti. Essa ha inoltre derivata nulla in ogni punto di $[0, 1]-K$. Infatti se $x_0 \notin K$ dovrà risultare $x_0 \notin K_h$ per qualche $h \in \mathbf{N}$. Ma allora $f(x)=f_h(x)=\mathit{costante}$ in un intorno di x_0, e dunque $f'(x_0)=0$. Poiché K ha misura nulla, la funzione di Cantor ha derivata nulla in quasi tutti i punti di $[a, b]$ (e cioè in tutti i punti tranne al più in un insieme di misura nulla), e verifica $f(a)=\alpha$ e $f(b)=\beta$. ∎

Esempio 3.5. Un insieme non misurabile

Nell'intervallo $[0, 1]$ due punti si diranno equivalenti se la loro differenza è un numero razionale. Si $\mathscr{A}$ l'insieme quoziente di $[0, 1]$ rispetto a questa relazione di equivalenza. Ogni elemento $\alpha \in \mathscr{A}$ è costituito da un punto di $[0, 1]$ e da tutti i punti ad esso equivalenti, e cioè che differiscono da questo per un numero razionale. Per ogni $\alpha \in \mathscr{A}$ si scelga un numero reale $x_\alpha \in \alpha$, e sia E l'insieme costituito da tutti questi punti:

$$E=\{x_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}.$$

Dimostreremo, ragionando per assurdo, che E non è misurabile.

Supponiamo che E sia misurabile, e per ogni numero razionale $r \in [-1, 1]$ sia

$$\tau_r E = \{x \in \mathbf{R} : x - r \in E\} = \{x + r : x \in E\}$$

l'insieme ottenuto traslando di r tutti i punti di E. L'insieme $\tau_r E$ è misurabile, e si ha $\mathrm{m}(\tau_r E) = \mathrm{m}(E)$ (vedi esercizio 2.8).

Non è difficile vedere che se $r \neq s$ si ha $\tau_r E \cap \tau_s E = \emptyset$. Infatti altrimenti esisterebbero due punti x_1 e x_2 di E tali che $x_1 + r = \tau_r x_1 = \tau_s x_2 = x_2 + s$, e dunque $x_1 - x_2 = = s - r$ sarebbe un numero razionale diverso da zero, mentre per definizione in E non ci sono punti equivalenti. Inoltre, dato che in E c'è un rappresentante di ogni classe di equivalenza, per ogni punto w di $[0, 1]$ esiste un punto di E che differisce da w per un numero razionale compreso tra -1 e 1. Ne segue

$$\mathscr{E} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]} \tau_r E \supset [0, 1].$$

Inoltre tutti gli insiemi $\tau_r E$, e dunque anche $\mathscr{E}$, sono contenuti in $[-1, 2]$.

Si ha allora

$$1 = \mathrm{m}([0, 1]) \leqslant \mathrm{m}(\mathscr{E}) \leqslant \mathrm{m}([-1, 2]) = 3$$

e poiché gli insiemi $\tau_h E$ sono a due a due disgiunti:

$$\mathrm{m}(\mathscr{E}) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]} \mathrm{m}(\tau_r E) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1, 1]} \mathrm{m}(E).$$

Queste relazioni sono contraddittorie. Infatti se $\mathrm{m}(E) = 0$ si deve avere anche $\mathrm{m}(\mathscr{E}) = 0$, e dunque non può essere $\mathrm{m}(\mathscr{E}) \geqslant 1$, mentre se $\mathrm{m}(E) > 0$ si avrà $\mathrm{m}(\mathscr{E}) = +\infty$, e non potrà essere $\mathrm{m}(\mathscr{E}) \leqslant 3$. ■

Esercizi

3.1 Sia E_0 il cerchio $I(0, 1)$ in $\mathbf{R}^2$, e per $k > 0$ sia $\mathbf{x}_k = (1 - 4^{-k}, 0)$ e

$$E_k = I(\mathbf{x}_k, 4^{-k-1});$$

sia inoltre

$$E = E_0 - (E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = E_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Si trovi la misura di E.

3.2 (A) Dimostrare che ogni $x \in [0, 1]$ si può scrivere nella forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i},$$

con $a_i = 0$, 1 o 2.

(B) Se x è scritto nella forma (A), l'espressione

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

è la rappresentazione di x in base 3; ad esempio

$$\frac{2}{9} = 0{,}02000 \dots = 0{,}02\bar{0}.$$

Verificare che si ha anche

$$\frac{2}{9} = 0{,}01\bar{2}.$$

(C) In caso di non unicità della rappresentazione preferiremo quella che contiene meno numeri 1; ad esempio, alla rappresentazione

$$\frac{16}{27} = 0{,}121\bar{0},$$

preferiremo

$$\frac{16}{27} = 0{,}120\bar{2}.$$

In tal modo, ogni numero ha rappresentazione unica.

Ciò premesso, si dimostri che un numero reale $x \in [0, 1]$ appartiene all'insieme di Cantor K se e solo se la sua rappresentazione in base 3 non contiene la cifra 1. (Ad esempio $1/3 = 0{,}0\bar{2} \in K$; mentre $16/27 = 0{,}120\bar{2} \notin K$.)

(D) Si consideri l'applicazione $f: K \to [0, 1]$, che associa al punto $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \in$ $\in K$ il punto

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i-1}.$$

Si dimostri che f è un'applicazione surgettiva, cosicché K *non* è numerabile.

3.3 Dimostrare che se $\mathrm{m}(E) = 0$ e $F \subset E$, allora anche $\mathrm{m}(F) = 0$.

3.4 Sia $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ una successione di insiemi compatti, ognuno contenuto nel precedente, e sia

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Si provi che $\mathrm{m}(K) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{m}(K_i)$. (Si prenda un aperto $A \supset K_1$ e si considerino gli insiemi $A_i = A - K_i$.)

3.5 Siano Q e Q' gli insiemi dei numeri razionali e dei numeri irrazionali dell'intervallo $[0, 1]$ (vedi esempi 3.1 e 3.2). Si dimostri che $\bar{\mu}(Q) = \bar{\mu}(Q') = 1$, mentre $\underline{\mu}(Q) =$ $= \underline{\mu}(Q') = 0$.

4 Insiemi di misura infinita

Nel paragrafo 2 abbiamo definito misurabili quegli insiemi le cui misure interna ed esterna sono uguali e finite. Talvolta però può essere comodo avere una definizione di misurabilità anche per insiemi di misura infinita.

Definizione 4.1 *Un insieme* $E \subset \mathbf{R}^n$ *si dice misurabile se per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $E \cap I_r$ *(intersezione di E con la palla di centro* 0 *e raggio* r*) è misurabile, cioè se per ogni* r

$$\underline{\mathrm{m}}(E \cap I_r) = \overline{\mathrm{m}}(E \cap I_r).$$

E' evidente dal teorema 2.1 che se un insieme E è misurabile nel senso della definizione 2.4, cioè se $\underline{\mathrm{m}}(E) = \overline{\mathrm{m}}(E) < +\infty$, lo sarà anche secondo la definizione precedente. Non sarà però vero il viceversa; ad esempio, un qualsiasi aperto di misura infinita (in particolare tutto $\mathbf{R}^n$) sarà misurabile ai sensi della definizione 4.1, ma non avendo misura finita non ricadrà sotto la definizione 2.4. Nel seguito quando parleremo di insiemi misurabili intenderemo sempre riferirci alla definizione 4.1.

Proposizione 4.1 *Se E è misurabile, si ha*

$$\overline{\mathrm{m}}(E) = \underline{\mathrm{m}}(E) = \lim_{r \to \infty} \mathrm{m}(E \cap I_r). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Si indichi con L il limite a destra della [4.1]; tale limite esiste perché $\mathrm{m}(E \cap I_r)$ è una funzione crescente di r. Per ogni $r > 0$, esiste un compatto $K_r \subset E \cap I_r$ tale che

$$\mathrm{m}(K_r) > \mathrm{m}(E \cap I_r) - 1/r.$$

Poiché $K_r \subset E$, risulterà

$$\underline{\mathrm{m}}(E) > \mathrm{m}(E \cap I_r) - 1/r$$

e, passando al limite per $r \to +\infty$,

$$\underline{\mathrm{m}}(E) \geqslant L. \tag{4.2}$$

D'altra parte

$$E = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} E \cap I_r$$

e, per la proposizione 3.2,

$$\overline{\mathrm{m}}(E) = L,$$

che confrontata con la [4.2] dà la tesi. ■

Il teorema 2.1 continua chiaramente a valere per insiemi misurabili secondo la nuova definizione 4.1: si ha infatti

$$(E \cup F) \cap I_r = (E \cap I_r) \cup (F \cap I_r)$$

$$(E \cap F) \cap I_r = (E \cap I_r) \cap (F \cap I_r)$$

$$(E - F) \cap I_r = (E \cap I_r) - (F \cap I_r),$$

e quindi, se E e F sono misurabili, lo saranno anche $E \cup F$, $E \cap F$ e $E-F$. In particolare, siccome $\mathbf{R}^n$ è misurabile (in quanto aperto), il complementare di ogni insieme misurabile è misurabile, e dunque gli insiemi chiusi sono misurabili.

Osservazione 4.1. Si potrebbe essere tentati di definire semplicemente gli insiemi misurabili come quegli insiemi per cui $\underline{\mathrm{m}}(E)=\overline{\mathrm{m}}(E)$, eliminando così le lungaggini della doppia definizione 2.4 e 4.1. In questo modo si avrebbero però dei seri inconvenienti con gli insiemi di misura infinita; in particolare, il teorema 2.1 non sarebbe valido in generale.

Sia infatti F un insieme non misurabile, contenuto in I_1, e sia

$$E=F \cup (\mathbf{R}^n - I_1).$$

Si ha evidentemente $\overline{\mathrm{m}}(E)=\underline{\mathrm{m}}(E)=+\infty$ e dunque E risulterebbe misurabile, mentre $E \cap I_1 = F$ non lo è.

Queste difficoltà scompaiono adottando la definizione 4.1; infatti l'insieme E non è misurabile, dato che per l'appunto non lo è $F=E \cap I_1$. ∎

I risultati del paragrafo precedente restano validi anche per insiemi misurabili qualsiasi.

Teorema 4.1 *Sia $E_1, E_2, E_3, \ldots$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili, e sia*

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i;$$

l'insieme E è misurabile e si ha

$$\mathrm{m}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i), \tag{4.3}$$

Se poi gli E_i sono a due a due disgiunti, risulta

$$\mathrm{m}(E)=\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_i). \tag{4.4}$$

Infine, se si ha $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, allora

$$\mathrm{m}(E)=\lim_{i\to\infty} \mathrm{m}(E_i). \tag{4.5}$$

Dimostrazione. L'insieme E è misurabile: infatti per ogni r abbiamo

$$E \cap I_r = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap I_r),$$

e dunque $E \cap I_r$ è misurabile essendo unione numerabile di insiemi misurabili, e verificando la condizione $\overline{\mathrm{m}}(E \cap I_r) \leqslant \overline{\mathrm{m}}(I_r) < +\infty$.

Per la proposizione 4.1 risulterà $m(E)=\overline{m}(E)$, e le [4.3] e [4.4] seguono dalla proposizione 3.1.

Infine la [4.5] segue immediatamente dalla proposizione 3.2. ■

Esercizi

4.1 Si dimostri che se E e F sono insiemi misurabili, $F \subset E$, e $m(F) < +\infty$, allora

$$m(E-F)=m(E)-m(F).$$

4.2 Si provi che se $F_1, F_2, \ldots$ sono insiemi misurabili, allora

$$F=\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

è misurabile.

4.3 Sia $F_1, F_2, F_3, \ldots$ una successione di insiemi misurabili, con $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ e con $m(F_1) < +\infty$, e sia

$$F=\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Si dimostri che se $m(F_1) < +\infty$ allora

$$m(F)=\lim_{i\to\infty} m(F_i)$$

(si considerino gli insiemi $E_i=F_1-F_i$).

5 La misura nei prodotti cartesiani

I risultati di questo paragrafo non sono molto importanti di per sé (e anzi il principale risultato, il teorema 5.1, è un caso particolare del teorema di Fubini, che verrà dimostrato nel prossimo capitolo), ma rappresentano un mezzo tecnico che sarà utile per lo sviluppo della teoria dell'integrazione.

Teorema 5.1 *Siano* $E \subset \mathbf{R}^n$ *e* $F \subset \mathbf{R}^k$ *due insiemi misurabili. Allora l'insieme* $E \times F \subset \mathbf{R}^{n+k}$ *è misurabile e si ha*

$$m_{n+k}(E \times F)=m_n(E)\, m_k(F). \qquad [5.1]$$

Dimostrazione. Verrà fatta in vari stadi. Si comincia dapprima con l'osservare che la [5.1] è ovvia se E e F sono intervalli, ed è semplice se E e F sono plurintervalli.

Il passo successivo consiste nel dimostrare la [5.1] per insiemi aperti. Siano $A \subset \mathbf{R}^n$

e $B \subset \mathbf{R}^k$ due aperti. Sia $\{P_j\}$ una successione di plurintervalli, con $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ e con

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j = A \qquad \text{(vedi esercizi 2.10 e 2.11).}$$

Si ha, ricordando il teorema 3.2,

$$\mathrm{m}_n(A) = \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}_n(P_j).$$

Analogamente, sia $\{Q_j\}$ una successione di plurintervalli con le stesse caratteristiche della precedente, relativa all'aperto B. Se si pone $R_j = P_j \times Q_j$, si ha $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$ e

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = A \times B,$$

cosicché

$$\mathrm{m}_{n+k}(A \times B) = \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}_{n+k}(R_j) = \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}_n(P_j)\,\mathrm{m}_k(Q_j) = \mathrm{m}_n(A)\,\mathrm{m}_k(B),$$

e la [5.1] è dimostrata per insiemi aperti.

Con una dimostrazione analoga, utilizzando l'esercizio 2.12, e l'esercizio 4.3 al posto del teorema 3.2, si prova la [5.1] per insiemi compatti.

Siano infine E e F due insiemi misurabili; siano $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ due successioni di aperti, con $A_i \supset E$, $B_i \supset F$, e tali che

$$\mathrm{m}_n(A_i) \to \mathrm{m}_n(E); \quad \mathrm{m}_k(B_i) \to \mathrm{m}_k(F).$$

Si ha $E \times F \subset A_i \times B_i$, e dunque

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \leqslant \mathrm{m}_{n+k}(A_i \times B_i) = \mathrm{m}_n(A_i)\,\mathrm{m}_k(B_i),$$

da cui, passando al limite per $i \to \infty$,

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \leqslant \mathrm{m}_n(E)\,\mathrm{m}_k(F). \tag{5.2}$$

Con lo stesso ragionamento, approssimando E e F dall'interno con insiemi compatti, si ottiene la disuguaglianza

$$\underline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \geqslant \mathrm{m}_n(E)\,\mathrm{m}_k(F), \tag{5.3}$$

che confrontata con la [5.2] dà la [5.1]. ■

Osservazione 5.1. Si vede facilmente (il ragionamento è lo stesso), che se E e F sono insiemi arbitrari, invece delle [5.2], [5.3] si ottengono le disuguaglianze

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \leqslant \overline{\mathrm{m}}_n(E)\,\overline{\mathrm{m}}_k(F), \tag{5.4}$$

$$\underline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \geqslant \underline{\mathrm{m}}_n(E)\,\underline{\mathrm{m}}_k(F). \tag{5.5}$$

In realtà la [5.5] si può migliorare; si ha infatti

$$\underline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) = \underline{\mathrm{m}}_n(E)\,\underline{\mathrm{m}}_k(F). \tag{5.6}$$

Si consideri, per verificare tale relazione, un compatto Σ contenuto in $E \times F$, e sia

$$H = \mathrm{proj}_n(\Sigma) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \exists\, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma\}$$

la proiezione di Σ su $\mathbf{R}^n$. Indichiamo poi con K la proiezione di Σ su $\mathbf{R}^k$.

I due insiemi H e K sono compatti e risulta $H \subset E$ e $K \subset F$. Poiché $\Sigma \subset H \times K$, si ha

$$\mathrm{m}_{n+k}(\Sigma) \leqslant \mathrm{m}_{n+k}(H \times K) = \mathrm{m}_n(H)\, \mathrm{m}_k(K) \leqslant \underline{\mathrm{m}}_n(E)\, \underline{\mathrm{m}}_k(F)$$

e, per l'arbitrarietà di Σ,

$$\underline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \leqslant \underline{\mathrm{m}}_n(E)\, \underline{\mathrm{m}}_k(F),$$

che insieme alla [5.5] dà la [5.6]. ■

Anche nella [5.4] si ha l'uguaglianza, ma la dimostrazione è notevolmente più complicata. Per il seguito sarà comunque sufficiente la seguente

Proposizione 5.1 *Siano* $E \subset \mathbf{R}^n$ *e* $F \subset \mathbf{R}^k$. *Si ha*

$$\overline{\mathrm{m}}_n(E)\, \underline{\mathrm{m}}_k(F) \leqslant \overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F). \qquad [5.7]$$

Dimostrazione. Si può ovviamente supporre che $\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) < +\infty$.

Sia C un compatto contenuto in F (vedi fig. 5.4), e per $\epsilon > 0$ sia A un aperto

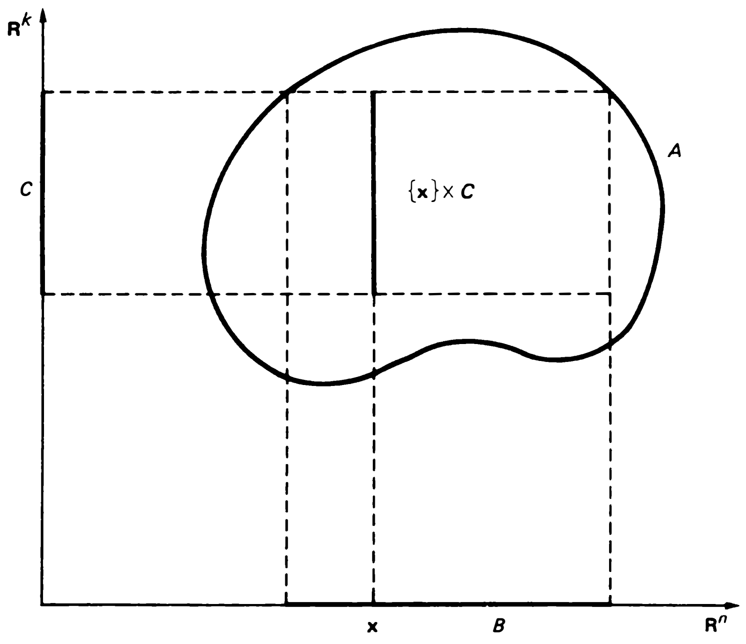

Figura 5.4

contenente $E \times F$ tale che

$$\mathrm{m}_{n+k}(A) < \overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) + \epsilon.$$

Si ponga

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \{\mathbf{x}\} \times C \subset A\}.$$

Poiché $\{\mathbf{x}\} \times C$ è un compatto contenuto nell'aperto A, esiste un intorno V di $\mathbf{x}$ tale che $V \times C \subset A$. Ne segue che

$$B \supset E; \quad B \times C \subset A.$$

Allora

$$\mathrm{m}_{n+k}(A) \geqslant \mathrm{m}_{n+k}(B \times C) = \mathrm{m}_n(B)\,\mathrm{m}_k(C) \geqslant \overline{\mathrm{m}}_n(E)\,\mathrm{m}_k(C)$$

(nell'uguaglianza centrale si è usato il teorema 5.1). Si ha dunque

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) > \overline{\mathrm{m}}_n(E)\mathrm{m}_k(C) - \epsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di ϵ,

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \geqslant \overline{\mathrm{m}}_n(E)\,\mathrm{m}_k(C).$$

Quest'ultima disuguaglianza è valida per ogni compatto $C \subset F$, e dunque

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) \geqslant \overline{\mathrm{m}}_n(E)\,\underline{\mathrm{m}}_k(F). \blacksquare$$

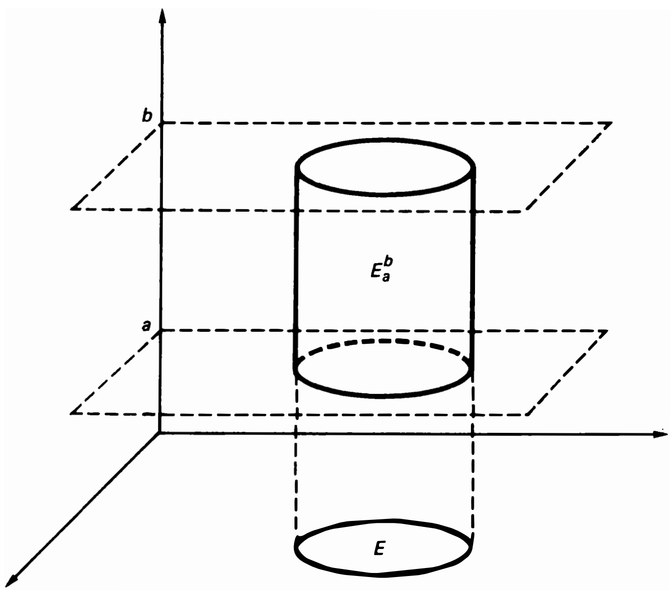

Figura 5.5

Osservazione 5.2. E' evidente che oltre alla [5.7] si avrà anche

$$\underline{\mathrm{m}}_n(E)\,\overline{\mathrm{m}}_k(F) \leqslant \overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F). \qquad [5.8]$$

Confrontando le [5.6], [5.7] con le [5.4], [5.5] si conclude che se uno degli insiemi E, F (ad esempio F) è misurabile, allora

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+k}(E \times F) = \overline{\mathrm{m}}_n(E)\,\mathrm{m}_k(F). \qquad [5.9]$$

Un caso che sarà usato nel seguito si presenta quando $F=(a, b)$, oppure $F=[a, b]$ (vedi fig. 5.5). Se si pone

$$E_a^b = E \times (a, b), \quad \widetilde{E}_a^b = E \times [a, b],$$

si ottiene

$$\overline{\mathrm{m}}_{n+1}(E_a^b) = \overline{\mathrm{m}}_{n+1}(\widetilde{E}_a^b) = (b-a)\,\overline{\mathrm{m}}_n(E), \qquad [5.10]$$

$$\underline{\mathrm{m}}_{n+1}(E_a^b) = \underline{\mathrm{m}}_{n+1}(\widetilde{E}_a) = (b-a)\,\underline{\mathrm{m}}_n(E). \blacksquare \qquad [5.11]$$

Capitolo 6

L'integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

1 L'integrale di Lebesgue

La definizione dell'integrale secondo Lebesgue di una funzione è concettualmente identica a quella dell'integrale di Riemann (vedi vol. 1, cap. 4, §§ 2 e 3). L'unica differenza consiste nella definizione delle funzioni semplici.

Definizione 1.1 *Si dice funzione semplice in $\mathbf{R}^n$ una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e limitati di $\mathbf{R}^n$, a due a due disgiunti,*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_{E_i}(\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

Se φ è la funzione semplice [1.1] *si definisce integrale di φ il numero*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathrm{m}(E_i). \tag{1.2}$$

L'integrale di φ si indica con i simboli

$$I_n(\varphi), \quad \int \varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Una funzione semplice φ si può scrivere in più modi come combinazione lineare di funzioni caratteristiche; come nel capitolo 4 (vol. 1), si dimostra che l'integrale non dipende dalla rappresentazione. Infatti, se oltre alla [1.1] si ha anche

$$\varphi = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \varphi_{F_k}$$

con gli F_k misurabili, limitati e a due a due disgiunti, si avrà

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \lambda_i \varphi_{E_i \cap F_k} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \mu_k \varphi_{E_i \cap F_k}. \tag{1.3}$$

D'altra parte

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathrm{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \lambda_i \mathrm{m}(E_i \cap F_k). \qquad [1.4]$$

$$\sum_{k=1}^{M} \mu_k \mathrm{m}(F_k) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \mu_k \mathrm{m}(E_i \cap F_k). \qquad [1.5]$$

Poiché dalla [1.3] segue che $\lambda_i = \mu_k$ non appena $E_i \cap F_k \neq \emptyset$, i secondi membri delle [1.4] e [1.5] sono uguali, e di conseguenza l'integrale della φ non dipende dalla sua rappresentazione.

Con un ragionamento simile si dimostra che, se φ e ψ sono funzioni semplici, sono tali anche $\varphi + \psi$ e $|\varphi|$. Inoltre si ha

$$\int (\varphi + \psi)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int \psi\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad [1.6]$$

$$\int c\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} = c \int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad c \in \mathbf{R}, \qquad [1.7]$$

Se $\varphi \leqslant \psi$, cioè se $\varphi(\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, risulta

$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \int \psi\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad [1.8]$$

e dunque in particolare:

$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [1.9]$$

L'insieme delle funzioni semplici in $\mathbf{R}^n$ verrà indicato con $\mathscr{S}$.

Sia ora $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in $\mathbf{R}^n$, limitata e nulla fuori di un compatto. Indichiamo con $\mathscr{S}_+(f)$ la classe delle funzioni semplici che maggiorano la f

$$\mathscr{S}_+(f) = \{\varphi \in \mathscr{S} : \varphi(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}.$$

Analogamente

$$\mathscr{S}_-(f) = \{\psi \in \mathscr{S} : \psi(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}.$$

E' chiaro che le classi $\mathscr{S}_+(f)$ ed $\mathscr{S}_-(f)$ non sono vuote; infatti, se $f(\mathbf{x}) = 0$ fuori del compatto K e se $|f(\mathbf{x})| \leqslant M$, le funzioni semplici

$$\varphi = M\varphi_K \quad \text{e} \quad \psi = -M\varphi_K$$

sono rispettivamente una maggiorante e una minorante della f.

Definizione 1.2 *Sia* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *una funzione limitata e nulla fuori di un compatto. Si chiama integrale superiore della f il numero*

$$\overline{\int} f\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \inf \left\{ \int \varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x};\ \varphi \in \mathscr{S}_+(f) \right\},$$

e integrale inferiore il numero

$$\underline{\int} f\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\{\int \psi\,\mathrm{d}\mathbf{x};\ \psi \in \mathscr{S}_-(f)\}.$$

La funzione $f(\mathbf{x})$ si dirà sommabile (secondo Lebesgue) se il suo integrale superiore coincide con quello inferiore. In tal caso si chiama integrale di f il valore comune dell'integrale superiore e inferiore. L'integrale della funzione f si indica con uno dei simboli

$$I_n(f), \quad \int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Le seguenti proposizioni si dimostrano in maniera identica alle analoghe del primo volume (cap. 4, § 3), e vengono lasciate per esercizio.

Proposizione 1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(\mathbf{x})$, limitata e nulla fuori di un compatto, sia sommabile, è che esistano due successioni di funzioni semplici $\{\varphi_k\}$ e $\{\psi_k\}$, le une maggioranti e le altre minoranti, tali che*

$$\lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k - \psi_k)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

In tal caso esistono i limiti

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \int \psi_k\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

e si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int f\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Osservazione 1.1. Notiamo che si può sempre supporre che la successione $\{\varphi_k\}$ sia decrescente e che la $\{\psi_k\}$ sia crescente. Infatti se si pone

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1' = \varphi_1 & \psi_1' = \psi_1 \\
\varphi_2' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \min(\varphi_1, \varphi_2) & \psi_2' = \psi_1 \vee \psi_2 = \max(\psi_1, \psi_2) \\
\vdots & \vdots \\
\varphi_k' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k & \psi_k' = \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_k
\end{array}$$

le funzioni φ_k' sono maggioranti e le ψ_k' sono minoranti; inoltre

$$0 \leqslant \varphi_k' - \psi_k' \leqslant \varphi_k - \psi_k,$$

e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \int (\varphi'_k - \psi'_k)\,dx = 0.$$

E' chiaro che la successione φ'_k è decrescente, mentre la ψ'_k è crescente.

Proposizione 1.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(\mathbf{x})$, limitata e nulla fuori di un compatto, sia sommabile, è che per ogni $\epsilon > 0$ esistano due funzioni semplici φ e ψ, con*

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi$$

e

$$\int (\varphi - \psi)\,dx < \epsilon.$$

Esempio 1.1. Confronto con l'integrale di Riemann

Abbiamo già osservato che l'unica differenza, per quanto riguarda la definizione, tra l'integrale di Lebesgue e quello secondo Riemann consiste nella classe di funzioni semplici che intervengono nei due casi. Infatti, mentre in un caso (integrale di Lebesgue) le funzioni semplici sono le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, nell'altro (integrale di Riemann) si prendono in considerazione solo le funzioni semplici *elementari*, cioè le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

Se indichiamo con $\mathscr{S}$ la classe delle funzioni semplici e con $\mathscr{S}^{el}$ quella delle funzioni semplici elementari, si avrà ovviamente $\mathscr{S}^{el} \subset \mathscr{S}$. Se $f(\mathbf{x})$ è una funzione limitata e nulla fuori di un compatto:

$$\mathscr{S}^{el}_{+}(f) \subset \mathscr{S}_{+}(f), \quad \mathscr{S}^{el}_{-}(f) \subset \mathscr{S}_{-}(f),$$

cosicché

$$\begin{aligned}\sup\{\textstyle\int \psi\,dx;\ \psi \in \mathscr{S}^{el}_{-}(f)\} \leqslant \sup\{\textstyle\int \psi\,dx;\ \psi \in \mathscr{S}_{-}(f)\} &\leqslant \\ \leqslant \inf\{\textstyle\int \varphi\,dx;\ \varphi \in \mathscr{S}_{+}(f)\} &\leqslant \\ \leqslant \inf\{\textstyle\int \varphi\,dx;\ \varphi \in \mathscr{S}^{el}_{+}(f)\}&.\end{aligned}$$

Ricordando che una funzione è integrabile secondo Riemann se risulta

$$\sup\{\textstyle\int \psi\,dx;\ \psi \in \mathscr{S}^{el}_{-}(f)\} = \inf\{\textstyle\int \varphi\,dx;\ \varphi \in \mathscr{S}^{el}_{+}(f)\},$$

si conclude che ogni funzione integrabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue e i due integrali coincidono. In particolare le due nozioni di integrale coincidono per le funzioni continue (e per quelle continue a tratti), e quindi continueranno a valere per l'integrale di Lebesgue i risultati dei capitoli 4 e 5 del primo volume (ad esempio il teorema fondamentale del calcolo integrale).

Esercizi

1.1 Dimostrare che, se $f(\mathbf{x})$ è sommabile, lo sono anche le funzioni

$$f^+(\mathbf{x})=\max\{f(\mathbf{x}), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(\mathbf{x})=-\min\{f(\mathbf{x}), 0\}.$$

1.2 Dimostrare che, se $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ sono sommabili, allora anche $f+g$, cf e $|f|$ sono sommabili, e si ha

$$\int(f+g)\,d\mathbf{x}=\int f\,d\mathbf{x}+\int g\,d\mathbf{x}$$

$$\int cf\,d\mathbf{x}=c\int f\,d\mathbf{x}$$

$$\int f\,d\mathbf{x}\leqslant\int g\,d\mathbf{x}, \qquad \text{se} \quad f(\mathbf{x})\leqslant g(\mathbf{x}) \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n,$$

$$\left|\int f\,d\mathbf{x}\right|\leqslant\int|f|\,d\mathbf{x}.$$

2 Funzioni misurabili

Per ottenere la massima generalità consentiremo qui e nel seguito alle funzioni in esame di assumere anche i valori $+\infty$ e $-\infty$; in altre parole considereremo funzioni a valori nella retta ampliata[1]

$$\overline{\mathbf{R}}=\{-\infty\}\cup\mathbf{R}\cup\{+\infty\}.$$

Definizione 2.1 *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in $\mathbf{R}^n$. Diremo che f è misurabile se per ogni $t\in\mathbf{R}$ l'insieme*

$$F_t=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : f(\mathbf{x})>t\}$$

è misurabile.

[1] Alla retta ampliata $\overline{\mathbf{R}}$ si può estendere l'ordinamento di $\mathbf{R}$ ponendo semplicemente $-\infty<a<$ $<+\infty$ per ogni numero reale a. Si possono estendere in parte anche le operazioni di somma e di prodotto (con l'eccezione della somma $+\infty-\infty$ e dei prodotti $+\infty\cdot 0$ e $-\infty\cdot 0$ che non sono definiti) nel modo seguente:

$$+\infty+\infty=+\infty+a=+\infty,$$

$$-\infty-\infty=-\infty+a=-\infty,$$

$$+\infty\cdot a=\begin{cases}+\infty & \text{se} \quad a>0\\ -\infty & \text{se} \quad a<0,\end{cases}$$

$$-\infty\cdot a=\begin{cases}-\infty & \text{se} \quad a>0\\ +\infty & \text{se} \quad a<0.\end{cases}$$

Si vede facilmente che *ogni funzione continua è misurabile*. Infatti, se $f(\mathbf{x})$ è continua e se $f(\mathbf{x}_0)>t$, esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ in cui si ha $f(\mathbf{x})>t$ (teorema della permanenza del segno). Di conseguenza F_t è aperto e dunque misurabile.

Proposizione 2.1 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(a) $F_t' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) \leqslant t\}$ *è misurabile per ogni* $t \in \mathbf{R}$.
(b) $F_t'' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) < t\}$ *è misurabile per ogni* $t \in \mathbf{R}$.
(c) $F_t''' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) \geqslant t\}$ *è misurabile per ogni* $t \in \mathbf{R}$.
(d) $f(\mathbf{x})$ *è misurabile.*

Dimostrazione

(d) $\Rightarrow$ (a) Basta osservare che

$$F_t' = \mathbf{R}^n - F_t.$$

e ricordare che il complementare di un insieme misurabile è misurabile.

(a) $\Rightarrow$ (b) Si osservi che

$$F_t'' = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{t-1/k}'$$

e si ricordi il teorema 4.1 del capitolo 5.

(b) $\Rightarrow$ (c) Infatti

$$F_t''' = \mathbf{R}^n - F_t''.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Segue dalla relazione

$$F_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{t+1/k}'''. \blacksquare$$

Vogliamo ora stabilire alcune proprietà delle funzioni misurabili. Per questo dimostreremo il seguente

Lemma 2.1 *Se* $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$ *sono due funzioni misurabili, l'insieme*

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$$

è misurabile.

Dimostrazione. Se per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ risulta $f(\mathbf{x})>g(\mathbf{x})$ (cioè se $\mathbf{x} \in E$), esisterà un numero razionale r tale che

$$f(\mathbf{x})>r>g(\mathbf{x}).$$

Viceversa, se questa relazione è verificata, allora $\mathbf{x} \in E$, e dunque in,definitiva, $\mathbf{x} \in E$

se e solo se esiste un numero razionale r tale che $\mathbf{x} \in F_r \cap G_r''$. Ne segue

$$E = \bigcup_{r \in Q} (F_r \cap G_r''),$$

dove si è indicato con Q l'insieme dei numeri razionali.

Poiché Q è numerabile, E risulterà misurabile grazie al teorema 4.1 del capitolo 5. ■

La classe delle funzioni misurabili verrà indicata con $\mathcal{M}$. Si ha il seguente

Teorema 2.1 (proprietà delle funzioni misurabili)

(1) *Se $f \in \mathcal{M}$ e $c \in \mathbf{R}$, allora $f+c$ e cf sono misurabili.*

(2) *Se f e $g \in \mathcal{M}$, allora $f+g$, f^2 e fg sono misurabili.*

(3) *Se $f_1, f_2, \ldots$ è una successione di funzioni misurabili, le funzioni*

$$M(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbf{N}} f_k(x) \quad e \quad m(\mathbf{x}) = \inf_{k \in \mathbf{N}} f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili.[2]

(4) *Se $\{f_k\}$ è una successione in $\mathcal{M}$, con $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$, allora*

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to \infty} f_k(\mathbf{x})$$

è misurabile.

(5) *Se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni misurabili, le funzioni*

$$f(\mathbf{x}) = \max_{k \to \infty} \lim f_k(\mathbf{x}) \quad e \quad g(\mathbf{x}) = \min_{k \to \infty} \lim f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili. In particolare, se la successione $\{f_k\}$ converge puntualmente a $f(x)$, quest'ultima funzione risulta misurabile.

Dimostrazione

(1) Segue immediatamente dalla definizione e viene lasciata per esercizio.

(2) Si ha

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) > t\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) > t - g(\mathbf{x})\}$$

e per il lemma 2.1 quest'ultimo insieme è misurabile, cosicché $f+g \in \mathcal{M}$.

Se $t \geqslant 0$, si ha

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f^2(\mathbf{x}) > t\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) > \sqrt{t}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) < -\sqrt{t}\},$$

mentre, se $t < 0$,

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f^2(\mathbf{x}) > t\} = \mathbf{R}^n.$$

[2] Si vede qui l'utilità di considerare funzioni a valori in $\bar{\mathbf{R}}$. Infatti se ci fossimo limitati a funzioni reali sarebbe stato necessario introdurre l'ipotesi che $M(\mathbf{x}) < +\infty$ e $m(\mathbf{x}) > -\infty$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

In ogni caso l'insieme

$$\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : f^2(\mathbf{x})>t\}$$

è misurabile e quindi $f^2 \in \mathcal{M}$.

Infine si ha

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

e quindi anche fg è misurabile.

(3) Si ha per ogni t:

$$\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : M(\mathbf{x})>t\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : f_j(\mathbf{x})>t\},$$

cosicché $M(\mathbf{x})$ è misurabile. Analogamente è misurabile $m(\mathbf{x})$, dato che

$$\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : m(\mathbf{x})<t\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\mathbf{x}\in \mathbf{R}^n : f_j(\mathbf{x})<t\}.$$

(4) Discende immediatamente da (3), in quanto

$$f(\mathbf{x})=\sup_{j\in \mathbf{N}} f_j(\mathbf{x}).$$

(5) Se si pone

$$M_k(\mathbf{x})=\sup_{j>k} f_j(\mathbf{x}),$$

le funzioni $M_k(\mathbf{x})$ sono tutte misurabili, e quindi sarà anche misurabile la funzione

$$f(\mathbf{x})=\inf_{k\in \mathbf{N}} M_k(\mathbf{x})=\max\lim_{j\to\infty} f_j(\mathbf{x}).$$

In maniera analoga si procede per il minimo limite. ■

Esempio 2.1

Siano ora $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ due funzioni misurabili. Se si definisce

$$f_1(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad f_2(\mathbf{x})=f_3(\mathbf{x})=\cdots=g(\mathbf{x}),$$

si ha per (3) che le funzioni

$$M(\mathbf{x})=\sup_{j\in \mathbf{N}} f_j(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\vee g(\mathbf{x});\quad m(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\wedge g(\mathbf{x})$$

sono misurabili.

In particolare se $f(\mathbf{x})$ è misurabile lo saranno anche le funzioni

$$f^+(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\vee 0 \quad \text{e} \quad f^-(\mathbf{x})=[-f(\mathbf{x})]\vee 0.$$

Viceversa, se f^+ ed f^- sono misurabili, sarà tale anche $f=f^+-f^-$. ■

Vogliamo dare a questo punto una caratterizzazione delle funzioni misurabili in termini del loro sottografico. *Se* $f(\mathbf{x})$ *è una funzione definita in* $\mathbf{R}^n$, *si chiama sotto-*

grafico di f l'insieme

$$\mathscr{F} = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : y < f(\mathbf{x})\} \quad \text{(vedi fig. 6.1).}$$

Si ha il seguente

Teorema 2.2 *Una funzione $f(\mathbf{x})$ è misurabile se e solo se l'insieme $\mathscr{F}$ è misurabile.*

Dimostrazione

(A) Sia $\mathscr{F}$ misurabile e sia $t \in \mathbf{R}$. Dobbiamo far vedere che l'insieme

$$F_t = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}$$

è misurabile, e cioè che per ogni $R > 0$ sono misurabili gli insiemi $F_t^R = F_t \cap I_R$.

Sia dunque $R > 0$, e per $h \in \mathbf{N}$ si ponga (vedi fig. 6.2)

$$\mathscr{F}_{t,h}^R = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathscr{F} : |\mathbf{x}| < R, t < y < t + 1/h\}.$$

L'insieme $\mathscr{F}_{t,h}^R$ è misurabile e limitato, e si ha

$$F_t^R \times (t, t + 1/h) \supset \mathscr{F}_{t,h}^R \supset F_{t+1/h}^R \times (t, t + 1/h).$$

Ricordando le [5.10] e [5.11] del capitolo 5, si ottiene

$$\underline{\mathrm{m}}_n(F_t^R) \geq h\, \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_{t,h}^R) \geq \overline{\mathrm{m}}_n(F_{t+1/h}^R),$$

e quindi, per ogni $h \in \mathbf{N}$,

$$\underline{\mathrm{m}}_n(F_t^R) \geq \overline{\mathrm{m}}_n(F_{t+1/h}^R); \qquad [2.1]$$

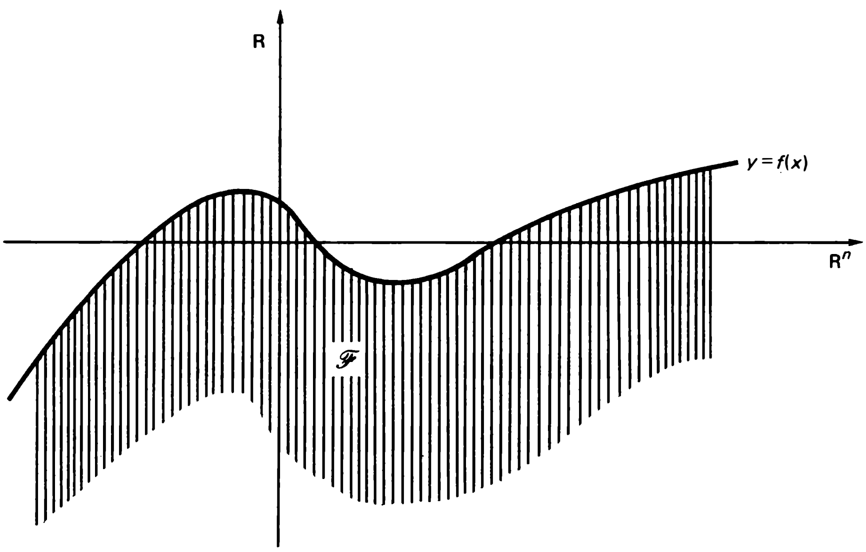

Figura 6.1

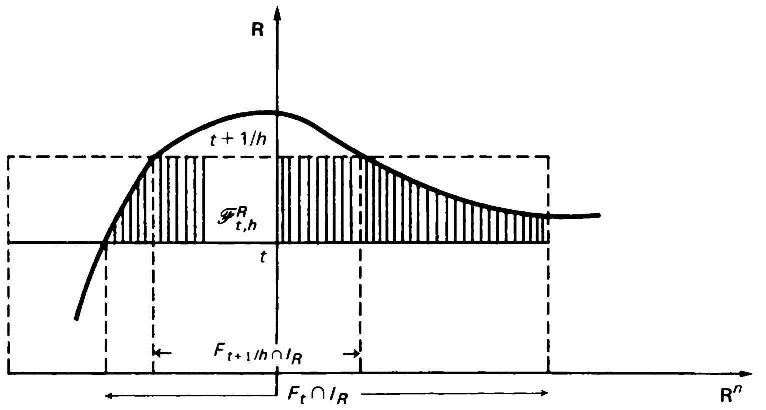

Figura 6.2

cosicché

$$\lim_{h\to\infty} \overline{\mathrm{m}}_n(F^R_{t+1/h}) \leqslant \underline{\mathrm{m}}_n(F^R_t).$$

D'altra parte

$$F^R_t = \bigcup_{h=1}^{\infty} F^R_{t+1/h},$$

e, per la proposizione 3.2 del capitolo 5,

$$\lim_{h\to\infty} \overline{\mathrm{m}}_n(F^R_{t+1/h}) = \overline{\mathrm{m}}_n(F^R_t).$$

Ne segue che $F^R_t = F_t \cap I_R$ è misurabile per ogni R e quindi F_t è misurabile.

(B) Sia ora f misurabile. Per ogni numero razionale r l'insieme

$$F_r \times (-\infty, r)$$

è misurabile. D'altra parte $(\mathbf{x}, y) \in \mathscr{F}$ (cioè $y < f(\mathbf{x})$) se e solo se esiste un numero razionale r tale che $y < r < f(\mathbf{x})$.

Allora

$$\mathscr{F} = \bigcup_{r\in Q} F_r \times (-\infty, r)$$

e quindi $\mathscr{F}$ è misurabile. ∎

Possiamo a questo punto studiare le relazioni che intercorrono tra funzioni misurabili e funzioni sommabili. Cominciamo con il dimostrare il seguente

Teorema 2.3 *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione misurabile, limitata e nulla fuori di un compatto K. Allora f è sommabile.*

Dimostrazione. Cominciamo dal caso in cui $f(\mathrm{x})\geqslant 0$. Sia P un intero tale che $f(\mathrm{x})<P$.

Sia $h\in\mathbf{N}$, e per $j=1, 2, ..., hP$ si ponga

$$G_j=\left\{\mathrm{x}\in\mathbf{R}^n : \frac{j-1}{h}<f(\mathrm{x})\leqslant\frac{j}{h}\right\}=F_{(j-1)/h}-F_{j/h}.$$

Gli insiemi G_j sono misurabili e a due a due disgiunti. Se si pone

$$\varphi_h(\mathrm{x})=\sum_{j=1}^{hP}\frac{j}{h}\varphi_{G_j}(\mathrm{x}),\quad \psi_h(\mathrm{x})=\sum_{j=1}^{hP}\frac{j-1}{h}\varphi_{G_j}(\mathrm{x}),$$

si ha $\varphi_h\in\mathscr{S}_+(f)$ e $\psi_h\in\mathscr{S}_-(f)$.

Inoltre

$$\int(\varphi_h-\psi_h)\,\mathrm{d}\mathrm{x}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{hP}\mathrm{m}(G_j)\leqslant\frac{1}{h}\mathrm{m}(K),$$

e per la proposizione 1.1 il teorema è dimostrato nel caso $f\geqslant 0$.

Se ora $f(\mathrm{x})$ è una funzione misurabile di segno variabile, le funzioni f^+ ed f^- sono misurabili, limitate, nulle fuori di K e positive. Per quanto appena visto f^+ ed f^- saranno sommabili e quindi anche $f=f^+-f^-$ sarà sommabile. ∎

Sia ora $f(x)$ una funzione sommabile limitata, nulla fuori di un compatto e non negativa. Consideriamo i due insiemi

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_0&=\{(\mathrm{x},y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R} : 0<y<f(\mathrm{x})\},\\ \mathscr{F}'_0&=\{(\mathrm{x},y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R} : 0<y\leqslant f(\mathrm{x})\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

e insieme alle funzioni φ_h e ψ_h definite nella proposizione 1.1, gli insiemi

$$\begin{aligned}\Phi'_h&=\{(\mathrm{x},y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R} : 0<y\leqslant\varphi_h(\mathrm{x})\},\\ \Psi_h&=\{(\mathrm{x},y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R} : 0<y<\psi_h(\mathrm{x})\}.\end{aligned}$$

Si ha

$$\Psi_h\subset\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}'_0\subset\Phi'_h,$$

e quindi

$$\mathrm{m}_{n+1}(\Psi_h)\leqslant\overline{\mathrm{m}}_{n+1}(\mathscr{F}_0)\leqslant\overline{\mathrm{m}}_{n+1}(\mathscr{F}'_0)\leqslant\mathrm{m}_{n+1}(\Phi'_h),\tag{2.3}$$

$$\mathrm{m}_{n+1}(\Psi_h)\leqslant\underline{\mathrm{m}}_{n+1}(\mathscr{F}_0)\leqslant\underline{\mathrm{m}}_{n+1}(\mathscr{F}'_0)\leqslant\mathrm{m}_{n+1}(\Phi'_h).\tag{2.4}$$

Per il teorema 5.1 del capitolo precedente

$$\mathrm{m}_{n+1}(\Psi_h)=\int\psi_h\,\mathrm{d}\mathrm{x},$$

$$\mathrm{m}_{n+1}(\Phi'_h)=\int\varphi_h\,\mathrm{d}\mathrm{x},$$

e, per la proposizione 1.1,

$$\lim_{h\to\infty}\int\varphi_h\,d\mathbf{x}=\lim_{h\to\infty}\int\psi_h\,d\mathbf{x}=\int f\,d\mathbf{x}.$$

Dalle [2.3] e [2.4] segue allora il seguente

Teorema 2.4 *Sia* $f(\mathbf{x})$ *una funzione sommabile, limitata, nulla fuori di un compatto e non negativa. Allora gli insiemi* $\mathscr{F}_0$ *ed* $\mathscr{F}'_0$ *sono misurabili e risulta*

$$m_{n+1}(\mathscr{F}_0)=m_{n+1}(\mathscr{F}'_0)=\int f\,d\mathbf{x}. \qquad [2.5]$$

Il teorema 2.4 sarà usato largamente nel seguito; ce ne serviremo ora per invertire il teorema 2.3.

Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione limitata, nulla fuori di un compatto e sommabile. Supponiamo dapprima che $f(\mathbf{x})$ sia non negativa. Per il teorema 2.4 l'insieme $\mathscr{F}_0$ è misurabile, e quindi è misurabile anche il sottografico $\mathscr{F}$ di f, dato che si ha

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}_0\cup(\mathbb{R}^n\times(-\infty,0]).$$

Applicando il teorema 2.2 si conclude che la funzione f è misurabile.

In generale, se f è di segno qualsiasi, le funzioni f^+ ed f^- sono non negative e sommabili se lo è f (vedi esercizio 1.1). Per quanto detto sopra, f^+ ed f^- sono misurabili, e quindi è tale anche f.

Ricordando la proposizione 2.1, si ottiene così il seguente

Teorema 2.5 *Una funzione* $f(\mathbf{x})$ *limitata e nulla fuori di un compatto è sommabile se e solo se è misurabile.*

Esercizi

2.1 Si dimostri che un insieme limitato E è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica φ_E è misurabile.

2.2 Dimostrare che la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x<0\\ x+3 & \text{se } x\geqslant 0\end{cases}$$

è misurabile.

2.3 Dire se sono misurabili le seguenti funzioni:

(a) e^x-x

(b) $[x]$

(c) $\begin{cases}x/|x| & \text{se } x\in\mathbb{R}-\{0\}\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$

2.4 Dimostrare che sono misurabili le funzioni semicontinue superiormente (inferiormente).

3 Alcune estensioni dell'integrale

Prima di sviluppare ulteriormente la teoria, sarà opportuno generalizzare il concetto di integrale, in analogia con quanto si è fatto per l'integrale di Riemann (vedi vol. 1, capp. 4 e 6). L'estensione avverrà essenzialmente in due direzioni: 1) integrale esteso a un insieme; 2) integrale di funzioni non limitate.

Definizione 3.1 *Sia E un insieme limitato di $\mathbf{R}^n$, e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione limitata, definita in E. Diremo che f è sommabile in E se la funzione*

$$f_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad \mathbf{x} \in E \\ 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

è sommabile. Quando ciò avviene, il numero reale $\int f_E \, \mathrm{d}\mathbf{x}$ si chiama integrale della funzione f esteso a E, e si indica con uno dei simboli

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int_E f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int_E f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{3.1}$$

Per l'integrale esteso a un insieme E valgono proprietà analoghe a quelle enunciate nell'esercizio 1.2.

In genere, l'insieme E su cui si esegue l'integrazione si suppone misurabile. In tal caso si dice che f è *misurabile in E* se, per ogni $t \in \mathbf{R}$, è misurabile l'insieme

$$F_t = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) > t\}.$$

Per le funzioni misurabili in E valgono, con i cambiamenti del caso, la proposizione 2.1 e il teorema 2.1. Vale inoltre l'analogo del teorema 2.5:

Una funzione f definita in un insieme E misurabile e limitato, e ivi limitata, è sommabile in E se e solo se è misurabile in E.

Veniamo ora alla definizione generale di integrale di una funzione qualunque (dunque anche non limitata) su un insieme arbitrario. Converrà trattare dapprima il caso di funzioni non negative.

Definizione 3.2 *Sia E un insieme di $\mathbf{R}^n$ e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in E e non negativa. Diremo che f è sommabile in E se:*

(a) *per ogni $t > 0$, la funzione*

$$f_t(\mathbf{x}) = \min\{f(\mathbf{x}), t\}$$

è sommabile in $E \cap I_t$;

(b) *risulta*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{E\cap I_t} f_t(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}<+\infty. \qquad [3.2]$$

Il limite a primo membro della [3.2] si chiama ancora integrale della funzione f esteso a E, e si denota con uno dei simboli [3.1]. Notiamo che, a causa della monotonia della funzione

$$F(t)=\int_{E\cap I_t} f_t(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x},$$

tale limite. esiste sempre (finito o pari a $+\infty$). Per abuso di linguaggio, diremo che l'*integrale di f su E è* $+\infty$ quando, essendo verificata la condizione (a), risulta

$$\lim_{t\to\infty}\int_{E\cap I_t} f_t\,\mathrm{d}\mathrm{x}=+\infty.$$

Osservazione 3.1. Se E e f sono ambedue limitati, la definizione 3.2 è in accordo con la precedente definizione 3.1. Infatti in tale caso esiste un $t_0>0$ tale che

$$f_{t_0}(\mathrm{x})=f(\mathrm{x}) \quad \text{e} \quad E\cap I_{t_0}=E.$$

Ne segue, per $t>t_0$,

$$F(t)=\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x},$$

cosicché le due definizioni conducono allo stesso risultato. ■

Osservazione 3.2. Se $f\geqslant 0$ è sommabile su E, risulta

$$\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}=\lim_{r\to\infty}\lim_{s\to\infty}\int_{E\cap I_r} f_s(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}=\lim_{s\to\infty}\lim_{r\to\infty}\int_{E\cap I_r} f_s(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}. \qquad [3.3]$$

Notiamo, per dimostrare tale relazione, che la funzione di due variabili

$$G(r,s)=\int_{E\cap I_r} f_s(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}$$

è crescente in r per ogni s fissato, e in s per ogni r fissato. Sia ora $\epsilon>0$, e sia t_0 tale che

$$\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}-\epsilon<F(t)\leqslant\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}$$

per ogni $t\geqslant t_0$. Se r e s sono maggiori di t_0 risulta, per la monotonia di G,

$$\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}-\epsilon<F(t_0)=G(t_0,t_0)\leqslant G(r,s)\leqslant\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}.$$

Passando al limite, prima per $s \to \infty$, e poi per $r \to \infty$, si ha

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \epsilon \leqslant \lim_{r\to\infty} \lim_{s\to\infty} G(r,s) \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

e per l'arbitrarietà di ϵ si ottiene la prima delle uguaglianze [3.3]. Un ragionamento analogo dimostra la seconda relazione. ■

Teorema 3.1 *Una funzione $f(\mathbf{x})$, definita in un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ e non negativa, è sommabile su E se e solo se gli insiemi*

$$\mathscr{F}_0 = \{(\mathbf{x},y) \in E \times \mathbf{R} : 0 < y < f(\mathbf{x})\}$$

e

$$\mathscr{F}'_0 = \{(\mathbf{x},y) \in E \times \mathbf{R} : 0 < y \leqslant f(\mathbf{x})\}$$

sono misurabili in $\mathbf{R}^{n+1}$, e hanno misura finita. In tal caso risulta

$$\int_E f\,d\mathbf{x} = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_0) = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}'_0). \qquad [3.4]$$

Dimostrazione. Si ponga

$$\mathscr{F}_t = \{(\mathbf{x},y) \in E \times \mathbf{R} : |\mathbf{x}| < t, 0 < y < f_t(\mathbf{x})\},$$
$$\mathscr{F}'_t = \{(\mathbf{x},y) \in E \times \mathbf{R} : |\mathbf{x}| < t, 0 < y \leqslant f_t(\mathbf{x})\}.$$

Per il teorema 2.4, la funzione f_t è sommabile su $E \cap I_t$ se e solo se gli insiemi $\mathscr{F}_t$ e $\mathscr{F}'_t$ sono misurabili; in tal caso si ha

$$\int_{E\cap I_t} f_t(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_t) = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}'_t). \qquad [3.5]$$

Se si fa tendere t all'infinito, i limiti delle tre espressioni nella [3.5] saranno uguali (ed esisteranno perché si tratta di funzioni crescenti). Poiché

$$\mathscr{F}_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j,$$

$$\mathscr{F}'_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}'_j,$$

risulterà

$$\int_E f\,dx = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_0) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_j) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}'_j) = \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}'_0).\ ■$$

Veniamo ora alle funzioni di segno variabile.

Definizione 3.3 *Diciamo che una funzione* f *è sommabile su* E *se sono sommabili su* E *ambedue le funzioni non negative*

$$f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\} \quad e \quad f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}), 0\}.$$

In questo caso porremo

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f^+(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_E f^-(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{3.6}$$

Osservazione 3.3. Talvolta per semplicità di esposizione sarà comodo considerare l'integrale della funzione f anche quando questo assume il valore $+\infty$ o $-\infty$. Più precisamente, sia E un insieme misurabile e sia f una funzione misurabile in E. Le due funzioni f^+ ed f^- sono integrabili su E, nel senso che esistono gli integrali

$$\int_E f^\pm\,d\mathbf{x} = \lim_{t\to\infty} \int_{E\cap I_t} f_t^\pm(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

i quali possono assumere valori finiti o pari a $+\infty$.

Se ambedue i limiti sono finiti, la funzione f è sommabile e il suo integrale è dato dalla [3.6]. D'altra parte, perché la formula [3.6] abbia senso è sufficiente che uno degli integrali a secondo membro sia finito. In questo caso, diremo che la funzione f *è integrabile su* E, e il suo integrale (che può essere finito o meno) è dato ancora dalla [3.6]. E' inutile dire che quest'ultima formula perde senso quando ambedue gli integrali a secondo membro sono infiniti.

Ricapitolando, se E è un insieme misurabile, possiamo definire tre classi di funzioni, ognuna contenuta nella precedente:

1) *funzioni misurabili su* E,
2) *funzioni integrabili su* E, cioè quelle funzioni misurabili su E per cui almeno una delle funzioni f^+ e f^- ha integrale finito,
3) *funzioni sommabili su* E, quando ambedue f^+ e f^- hanno integrale finito.

Per le ultime due classi l'integrale di f è definito dalla [3.6]. Non sarà inutile in questa occasione raccomandare una certa cautela quando si opera con i simboli $\pm\infty$. Ad esempio, non sempre la somma di due funzioni integrabili è integrabile. ■

Le funzioni considerate in questo paragrafo e nei seguenti, possono assumere, come si è detto, anche i valori $+\infty$ e $-\infty$. E' ragionevole pensare che una funzione sommabile non possa valere $+\infty$ o $-\infty$ in un insieme troppo grande. Questo è quanto si dimostra nel seguente

Teorema 3.2 *Sia $f(x)$ una funzione sommabile su un insieme misurabile E. Se si pone*

$$F_\infty = \{\mathrm{x} \in E : f(\mathrm{x}) = +\infty\},$$
$$F_{-\infty} = \{\mathrm{x} \in E : f(\mathrm{x}) = -\infty\},$$

si ha

$$\mathrm{m}(F_\infty) = \mathrm{m}(F_{-\infty}) = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo ad esempio F_∞. Si ha

$$F_\infty = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j,$$

quindi F_∞ è misurabile.

Per $r > 0$, si indichi con φ_r la funzione caratteristica dell'insieme $F_\infty \cap I_r$. Si ha

$$f^+(\mathrm{x}) > j\,\varphi_r(\mathrm{x}) \quad \text{per ogni} \quad j \in \mathbf{N},$$

per cui

$$\mathrm{m}(F_\infty \cap I_r) = \int \varphi_r \,\mathrm{d}\mathrm{x} \leqslant \frac{1}{j} \int_E f^+ \mathrm{d}\mathrm{x}.$$

Passando al limite per $j \to \infty$, si conclude che $\mathrm{m}(F_\infty \cap I_r) = 0$ per ogni $r > 0$, e dunque $\mathrm{m}(F_\infty) = 0$.

In maniera analoga si procede per $F_{-\infty}$; la dimostrazione in questo caso viene lasciata per esercizio. ■

Se una proprietà è verificata per tutti gli $x \in E$, tranne al più per quelli in un insieme di misura nulla, si dice che la proprietà in questione sussiste *quasi ovunque in E* (o anche *per quasi ogni* $\mathrm{x} \in E$). Così, ad esempio, il risultato appena dimostrato si può enunciare dicendo che *una funzione sommabile su E è finita quasi ovunque in E.*

E' chiaro che se $f(\mathrm{x}) = 0$ q. o. in E, allora si ha

$$\int_E f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x} = 0$$

(più in generale, se $f = g$ q. o. in E, allora $\int_E f\,\mathrm{d}\mathrm{x} = \int_E g\,\mathrm{d}\mathrm{x}$).

Questo risultato si può invertire:

Proposizione 3.1 *Se $f(\mathrm{x}) \geqslant 0$ in E e se $\int_E f\,\mathrm{d}\mathrm{x} = 0$, allora $f(\mathrm{x}) = 0$ q. o. in E.*

Dimostrazione. Si ha

$$F_0 = \{\mathrm{x} \in E : f(\mathrm{x}) > 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{1/j}.$$

Poiché $f(x)>1/j$ in $F_{1/j}$, risulta

$$\frac{1}{j}\,\mathrm{m}(F_{1/j})\leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

cosicché $\mathrm{m}(F_{1/j})=0$ per ogni j e quindi $\mathrm{m}(F_0)=0$. ∎

Esercizi

3.1 Sia $f(t)$ una funzione continua nell'intervallo (0, 1) e non limitata per $t\to 0$; supponiamo inoltre che f sia non negativa. Si dimostri che

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2 Dimostrare che se $g(\mathbf{x})$ è una funzione sommabile su E e se $f(\mathbf{x})$ è una funzione misurabile in E, tale che

$$|f(\mathbf{x})|\leqslant g(\mathbf{x}) \quad \text{q. o. in } E,$$

allora f è sommabile in E.

4 I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

In questo paragrafo ci porremo il seguente problema: se la successione $f_j(\mathbf{x})$ tende puntualmente alla funzione $f(\mathbf{x})$ in E, si può concludere che

$$\int_E f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x=\lim_{j\to\infty}\int_E f_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\;?$$

E' chiaro che in generale la risposta è negativa (basti ricordare la successione dell'esempio 3.3 del cap. 1, per $p\geqslant 2$) per cui se si vuole passare al limite sotto il segno di integrale occorrerà aggiungere qualche ipotesi supplementare. Un risultato di questo tipo, per l'integrale di Riemann, è stato precedentemente dimostrato (vedi cap. 1, § 3): se la successione $\{f_j\}$ converge *uniformemente* a $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, allora

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b f_j\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_a^b f\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Questo risultato è essenzialmente l'unico (e comunque il più naturale) che si possa dimostrare nell'ambito della teoria di Riemann; al contrario, se si considera l'integrale secondo Lebesgue, si potrà passare al limite sotto condizioni estremamente generali, come vedremo in questo paragrafo. E' proprio questa grande flessibilità dell'integrale di Lebesgue nei rispetti del passaggio al limite che rende quest'ultima teoria di gran lunga preferibile alla più semplice teoria di Riemann.

Ma veniamo ai risultati annunciati.

Teorema 4.1 (di Beppo Levi) *Sia f_j una successione di funzioni integrabili in E, con*

$$0 \leqslant f_1(\mathbf{x}) \leqslant f_2(\mathbf{x}) \leqslant f_3(\mathbf{x}) \leqslant \ldots$$

e sia

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{j \to \infty} f_j(\mathbf{x}).$$

Allora

$$\int_E f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{j \to \infty} \int_E f_j(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [4.1]$$

Dimostrazione. Se si pone

$$\mathscr{F}_{0j} = \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbf{R} : 0 < y < f_j(\mathbf{x})\},$$
$$\mathscr{F}_0 = \{(\mathbf{x}, y) \in E \times \mathbf{R} : 0 < y < f(\mathbf{x})\},$$

si ha $\mathscr{F}_{01} \subset \mathscr{F}_{02} \subset \ldots$ e $\mathscr{F}_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_{0j}$. Per il teorema 4.1 (cap. 5) risulta

$$\mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_0) = \lim_{j \to \infty} \mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F}_{0j}),$$

e ricordando il teorema 3.1 si ha la tesi. ■

Osservazione 4.1. Ci si può chiedere se il teorema appena dimostrato valga anche senza supporre che le funzioni f_i siano tutte positive. Si vede facilmente che questa ipotesi si può sostituire con la più debole $\int_E f_1(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} > -\infty$ (o più in generale con $\int_E f_h(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} > -\infty$ per qualche $h \in \mathbf{N}$): infatti in questo caso si può applicare il teorema 4.1 alle funzioni positive $g_i = f_i - f_1$.

Quest'ultima ipotesi è invece essenziale: infatti se si prende $E = \mathbf{R}$ e $f_i(x) = -1/i$, si ha $f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x) = 0$, e dunque $\int f(x)\, \mathrm{d}x = 0$, mentre $\int f_i(x)\, \mathrm{d}x = -\infty$. ■

Un analogo del teorema 4.1 sussiste per successioni decrescenti di funzioni: $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$. L'enunciato e la dimostrazione di questo risultato vengono lasciati per esercizio.

Teorema 4.2 (lemma di Fatou) *Sia* $\{f_j\}$ *una successione di funzioni non negative, e integràbili su un insieme misurabile* E.

Allora

$$\int_E (\min_{j\to\infty} \lim f_j)\,\mathrm{d}x \leqslant \min_{j\to\infty} \lim \int_E f_j\,\mathrm{d}x. \qquad [4.2]$$

Dimostrazione. Per $k=1, 2, \ldots$ si ponga

$$g_k(\mathrm{x}) = \inf_{j\geqslant k} f_j(\mathrm{x}). \qquad [4.3]$$

Si ha $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots$ e inoltre se $k \leqslant j$ risulta $g_k(\mathrm{x}) \leqslant f_j(\mathrm{x})$. Ne segue

$$\int_E g_k(\mathrm{x})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_j(\mathrm{x})\,\mathrm{d}x \quad \text{per ogni} \quad j \geqslant k,$$

e quindi

$$\int_E g_k(\mathrm{x})\,\mathrm{d}x \leqslant \min_{j\to\infty} \lim \int_E f_j(\mathrm{x})\,\mathrm{d}x. \qquad [4.4]$$

Alla successione g_k si può applicare il teorema di Levi, ottenendo

$$\int_E (\lim_{k\to\infty} g_k)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k\,\mathrm{d}x \leqslant \min_{j\to\infty} \lim \int_E f_j\,\mathrm{d}x$$

Da quest'ultima relazione si ottiene immediatamente la [4.2] ricordando che

$$\lim_{k\to\infty} g_k(\mathrm{x}) = \min_{j\to\infty} \lim f_j(\mathrm{x}). \blacksquare$$

Osservazione 4.2. Nel lemma di Fatou si può sostituire l'ipotesi $f_j \geqslant 0$ con $f_j(x) \geqslant 0$ q. o. in E, o meglio con la più generale

$$f_j(\mathrm{x}) \geqslant \varphi(\mathrm{x}) \quad \text{q. o. in } E,$$

dove $\varphi(\mathrm{x})$ è una funzione sommabile su E.

Infatti basterà considerare la successione

$$g_j(\mathrm{x}) = f_j(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{x}) \geqslant 0 \quad \text{q. o. in } E$$

e applicare a questa il risultato precedente.

Analogamente, se $\psi(\mathrm{x})$ è una funzione sommabile su E, e se la successione $\{f_j\}$ verifica la condizione

$$f_j(\mathrm{x}) \leqslant \psi(\mathrm{x}) \quad \text{q. o. in } E,$$

risulterà

$$\int_E (\max_{j\to\infty}\lim f_j)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \geqslant \max_{j\to\infty}\lim \int_E f_j\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \blacksquare \qquad [4.5]$$

Teorema 4.3 (di Lebesgue o della convergenza dominata) *Sia* $\psi(\mathbf{x})$ *una funzione non negativa e sommabile su un insieme misurabile* E, *e sia* $\{f_j(\mathbf{x})\}$ *una successione di funzioni integrabili in* E *tali che*

$$|f_j(\mathbf{x})| \leqslant \psi(\mathbf{x}) \quad \textit{q. o. in } E,$$

e

$$\lim_{j\to\infty} f_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \textit{q. o. in } E.$$

In tal caso

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_E f\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [4.6]$$

Dimostrazione. Si ha $-\psi(\mathbf{x}) \leqslant f_j(\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{x})$ quasi ovunque in E, cosicché sussistono le [4.2] e [4.5]. Osservando che

$$\min_{j\to\infty}\lim f_j(\mathbf{x}) = \max_{j\to\infty}\lim f_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

si ottiene

$$\int_E f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \min_{j\to\infty}\lim \int_E f_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \max_{j\to\infty}\lim \int_E f_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

e dunque la [4.6]. ■

Esempio 4.1

Alla luce del teorema di Lebesgue, ritorniamo per un momento sugli esempi del capitolo 1 (§ 3).

La successione di funzioni non negative

$$f_j(\mathbf{x}) = j^p x e^{-jx}, \quad p \geqslant 0,$$

converge alla funzione $f(\mathbf{x}) = 0$ nell'intervallo [0, 1]. Inoltre si ha

$$\int_0^1 f_j\,\mathrm{d}\mathbf{x} = j^{p-2}(1-(j+1)e^{-j}),$$

e quindi, se $p<2$,

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^1 f_j\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0=\int_0^1 f\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad [4.7]$$

mentre la [4.7] non sussiste per $p\geqslant 2$.

Se $0\leqslant p<1$, la successione $f_j(\mathbf{x})$ converge a zero uniformemente, e quindi la [4.7] si poteva dedurre dai risultati del capitolo 2 (§ 3).

D'altra parte la [4.7] è vera anche per $1\leqslant p<2$; per questi valori di p la convergenza della successione f_j non è uniforme, e quindi il risultato sopra menzionato non è applicabile.

E' invece applicabile il teorema di Lebesgue. La funzione

$$F(t)=t^p e^{-tx}, \quad 1\leqslant t<+\infty,$$

assume il valore massimo nel punto $t_0=p/x$, per cui risulta

$$0<f_j(x)=xF(j)\leqslant xF(p/x)=p^p e^{-p}x^{1-p}.$$

Per $p<2$ la funzione x^{1-p} è sommabile in $(0, 1)$, e quindi si può applicare il teorema di Lebesgue e concludere la validità della [4.7]. (Vedi anche cap. 1, esercizio 3.6). ■

Esempio 4.2

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbf{R}$, limitata e nulla fuori di un intervallo (a, b). Per $k\in\mathbf{N}$, si ponga[3]

$$M_k(x)=\sup_{I(x,1/k)} f(t)$$

e

$$f^*(x)=\lim_{k\to\infty} M_k(x)=\max\lim_{t\to x} f(t)\vee f(x).$$

Osserviamo innanzitutto che M_k è una funzione misurabile. Infatti, indicato con E_t l'insieme dei punti in cui M_k supera t, avremo $x\in E_t$ se e solo se esiste un punto $z\in I(x, 1/k)$ con $f(z)>t$ e cioè se e solo se la distanza di x da $F_t=\{z\in\mathbf{R}: f(z)>t\}$ è minore di $1/k$. Ne segue che E_t è aperto e dunque misurabile. Per il teorema 2.1 anche f^* è misurabile.

Come nell'esempio 1.1, indichiamo con $\mathscr{S}^{el}$ la classe delle funzioni semplici elementari (combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli). Poniamo poi

$$L=\inf\{\int\varphi\,\mathrm{d}x;\ \varphi\in\mathscr{S}^{el}_+(f)\}.$$

[3] $f^*(x)$ si chiama la *regolarizzata semicontinua superiormente di* f. Essa è la più piccola funzione semicontinua superiormente che sia maggiore o uguale a f. Analogamente $f_*(x)$ è la più grande funzione semicontinua inferiormente che non superi f. E' evidente che f è continua in x_0 se e solo se $f^*(x_0)=f_*(x_0)$.

Sia $\varphi \in \mathscr{S}_+^{el}(f)$ e sia x_0 un punto in cui φ è continua. Poiché φ è costante a tratti, esisterà un intorno $I(x_0, r)$ in cui φ è costante e siccome φ è maggiorante di f, risulterà

$$\varphi(x_0) \geqslant \sup_{I(x_0,\, r)} f(x).$$

Ne segue che $f^*(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$ in ogni punto in cui φ è continua, e dunque in quasi tutti i punti di $\mathbf{R}$. Allora

$$\int f^*(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{S}_+^{el}(f)$, cosicché

$$\int f^*(x)\,\mathrm{d}x \leqslant L. \qquad [4.8]$$

D'altra parte, se si divide l'intervallo (a, b) in intervalli $I_1, I_2, \dots, I_N$, ognuno di ampiezza minore di $1/k$, e si pone

$$\lambda_h = \sup_{I_h} f(x), \qquad h = 1, 2, \dots, N,$$

e

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{N} \lambda_h\, \varphi_{I_h}(x),$$

risulterà

$$\varphi(x) \leqslant M_k(x).$$

Infatti, ogni $x \in (a, b)$ apparterrà a qualche I_h, e dunque

$$\varphi(x) = \lambda_h = \sup_{I_h} f(x) \leqslant \sup_{I(x,\, 1/k)} f(t) = M_k(x)$$

dato che $I_h \subset I(x, 1/k)$. Si ha allora

$$L \leqslant \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int M_k(x)\,\mathrm{d}x$$

da cui, passando al limite per $k \to \infty$, e ricordando la [4.8], si ottiene la relazione

$$L = \inf\Big\{\int \varphi\,\mathrm{d}x;\ \varphi \in \mathscr{S}_+^{el}(f)\Big\} = \int f^*(x)\,\mathrm{d}x. \qquad [4.9]$$

Analogamente, se si pone

$$m_k(x) = \inf_{I(x,\, 1/k)} f(t),$$

$$f_*(x) = \lim_{k \to \infty} m_k(x) = \min \lim_{t \to x} f(t) \wedge f(x),$$

si ottiene

$$\sup\{\int \psi\, dx;\ \psi \in \mathscr{S}_-^{el}(f)\} = \int f_*(x)\, dx.$$

Ricordando la definizione di integrale di Riemann (vedi vol. 1, cap. 4, definizione 3.1) si conclude che una funzione $f(x)$ è integrabile secondo Riemann se e solo se

$$\int f^*(x)\, dx = \int f_*(x)\, dx. \qquad [4.10]$$

Poiché si ha sempre $f^*(x) \geqslant f_*(x)$, la [4.10] è verificata se e solo se $f^*(x) = f_*(x)$ quasi ovunque (vedi proposizione 3.1). D'altra parte $f^*(x) = f_*(x)$ se e soltanto se la funzione f è continua nel punto x, per cui risulterà in conclusione che *una funzione* $f(x)$*, limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile secondo Riemann se e solo se è continua quasi ovunque* (teorema di Vitali). ■

Osservazione 4.3. Un insieme E è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la sua funzione caratteristica φ_E è integrabile secondo Riemann, e dunque se e solo se φ_E è continua quasi ovunque. Poiché i punti di discontinuità di φ_E sono i punti di frontiera di E, si ritrova per questa via che E è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se ∂E ha misura nulla; un risultato già dimostrato nel capitolo 5, osservazione 2.3. ■

Esempio 4.3
Se $\alpha > 0$, risulta

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx. \qquad [4.11]$$

La funzione

$$g(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^x$$

è decrescente in $[0, n]$, e quindi $g(x) \leqslant g(0) = 1$.
Se si pone

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} & 0 \leqslant x < n \\ 0 & x \geqslant n, \end{cases}$$

risulta

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{\alpha-1} e^{-x}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1} e^{-x}.$$

Poiché per $\alpha>0$ la funzione $x^{\alpha-1}\ e^{-x}$ è sommabile in $(0, +\infty)$, la [4.11] segue immediatamente dal teorema di Lebesgue. ■

Se invece di successioni si considerano serie di funzioni, si possono applicare i risultati appena dimostrati alla successione delle somme parziali e ottenere così teoremi che consentono di scambiare tra loro le operazioni di somma della serie e di integrazione.

Di particolare interesse è il caso di una serie di funzioni non negative.

Sia $\{u_k(\mathbf{x})\}$ una successione di funzioni definite in un insieme misurabile E, non negative e misurabili. La successione $\{s_n(\mathbf{x})\}$ delle somme parziali della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in E,$$

sarà crescente, e dunque ad essa si potrà applicare il teorema di Levi. In conclusione, *se* $\{u_k(\mathbf{x})\}$ *è una successione di funzioni non negative e misurabili su* E, *risulta*

$$\int_E \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E u_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \qquad [4.12]$$

In altre parole, *nel caso di serie a termini positivi si possono sempre scambiare tra loro le operazioni di somma e di integrazione.*

Nel caso di serie a termini di segno qualsiasi, la [4.12] non è sempre valida; *se però si ha*

$$\int_E \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\right\} d\mathbf{x} < +\infty$$

(o, il che è equivalente, $\sum_{k=0}^{\infty} \int_E |u_k|\,d\mathbf{x} < +\infty$), *allora risulta*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_E u_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E \left\{\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x})\right\} d\mathbf{x}. \qquad [4.13]$$

Per dimostrare la [4.13], consideriamo la funzione

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(\mathbf{x})|.$$

Poiché $\int_E v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} < +\infty$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(\mathbf{x})|$ converge quasi ovunque (teorema 3.2) e dunque, per il teorema della convergenza assoluta, convergerà quasi ovunque anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x})$.

Se si pone

$$s_m(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{m} u_k(\mathbf{x}), \quad s(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x}),$$

si ha

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \quad \text{q. o. in } E,$$

e inoltre

$$|s_m(\mathbf{x})| \leqslant v(\mathbf{x}) \quad \text{q. o. in } E.$$

Per il teorema di Lebesgue si avrà allora

$$\int_E s(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{m\to\infty} \int_E s_m(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \int_E u_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E u_k\,\mathrm{d}\mathbf{x};$$

cioè la [4.13].

Esempio 4.4

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si ha, per $0 \leqslant x < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

e quindi

$$\frac{1}{1-x} \ln(1/x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \ln(1/x), \quad 0 < x < 1.$$

Le funzioni $x^k \ln(1/x)$ sono non negative e quindi sussiste la [4.12]. Si avrà allora

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-2}$$

e la tesi segue ricordando l'esempio 5.3 del capitolo 2. ■

Esercizi

4.1 Dimostrare che

(a) $$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} (p+k)^{-2}, \quad p > -1,$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \ln(1/x)\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$

4.2 Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\,dx = 0.$$

4.3 Sia E un insieme misurabile, con $\mathrm{m}(E) < +\infty$, e sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili in E tali che

(1) $|f_k(\mathbf{x})| \leqslant M$ q. o. in E,

(2) $\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ q. o. in E.

Si dimostri che

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mathbf{x} = \int_E f\,d\mathbf{x}.$$

4.4 Sia $f_k(x) = k/(x^2+k^2)$. Si dimostri che $0 \leqslant f_k \leqslant 1$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = \pi$. Perché questo non contraddice il risultato dell'esercizio precedente?

4.5 Sia $\{E_k\}$ una successione di insiemi misurabili, con $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, e sia

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Sia $f(x)$ una funzione integrabile su E. Dimostrare che

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

4.6 **(Assoluta continuità dell'integrale)** Sia E misurabile e $f(\mathbf{x})$ sommabile su E. Si dimostri che *per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, se* $F \subset E$ *e* $\mathrm{m}(F) < \delta$, *allora*

$$\int_F |f|\,d\mathbf{x} < \epsilon.$$

(in caso contrario esisterebbe un $\epsilon_0 > 0$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ un insieme F_k tale che $m(F_k) < 2^{-k-1}$ e $\int_{F_k} |f|\,d\mathbf{x} \geqslant \epsilon_0$. Si ponga $E_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} F_k$; si ha $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $m(E_j) < 2^{-j}$ e $\int_{E_j} |f|\,d\mathbf{x} \geqslant \epsilon_0$. La successione $g_j = |f|\varphi_{E_j}$ è decrescente ($g_1 \geqslant g_2 \geqslant \dots$) e tende a zero quasi ovunque. Applicare il teorema di Lebesgue).

4.7 Sia E misurabile e limitato e sia $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$ in E; allora

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\left\{\int_K f\,\mathrm{d}\mathbf{x}; K \text{ compatto, } K \subset E\right\}.$$

4.8 Lo stesso risultato vale anche senza l'ipotesi che E sia limitato.

4.9 Si dimostri che la successione $\{f_n\}$ dell'esempio 4.3 converge a $x^{\alpha-1}\,e^{-x}$, uniformemente su ogni intervallo chiuso $[a, +\infty)$, $a > 0$. Si ricavi il risultato dell'esempio 4.3 usando la [3.3] del capitolo 1.

5 Il teorema di Fubini

La teoria svolta finora non dà alcun metodo per il calcolo di integrali in $\mathbf{R}^n$, tranne ovviamente che nel caso di una variabile ($n = 1$) in cui, come abbiamo già osservato, resta valido il teorema fondamentale del calcolo integrale.

In questo paragrafo mostreremo come sia possibile calcolare un integrale n dimensionale eseguendo successivamente n integrazioni in una variabile. Per semplificare le dimostrazioni considereremo in dettaglio il caso $n = 2$, lasciando per esercizio la generalizzazione dei risultati a integrali in un numero qualsiasi di variabili.

Cominciamo col considerare il problema della misura di un insieme di $\mathbf{R}^2$; al solito tratteremo per primi i casi di insiemi aperti e compatti.

Lemma 5.1 *Sia A un aperto di* $\mathbf{R}^2$ (vedi fig. 6.3), *e per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *si ponga*

$$A_x = \{y \in \mathbf{R} : (x, y) \in A\}.$$

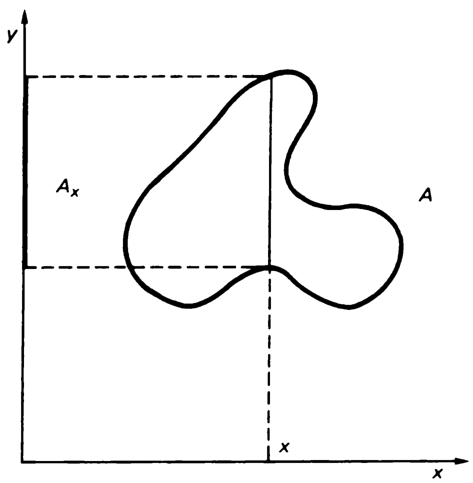

Figura 6.3

Si ha

$$m_2(A)=\int m_1(A_x)\,\mathrm{d}x. \qquad [5.1]$$

Dimostrazione. La [5.1] è ovvia per intervalli, e quindi sussiste anche per plurintervalli.

Sia $\{Y_k\}$ una successione di plurintervalli contenuti in A, e tali che

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \quad \text{e} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = A.$$

Si avrà

$$\mathrm{m}_2(A)=\lim_{k\to\infty}\mathrm{m}_2(Y_k)=\lim_{k\to\infty}\int \mathrm{m}_1(Y_{k,x})\,\mathrm{d}x. \qquad [5.2]$$

D'altra parte per ogni $x\in\mathbf{R}$ risulta

$$Y_{1,x}\subset Y_{2,x}\subset\ldots$$

e

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_{k,x}=A_x,$$

cosicché

$$\mathrm{m}_1(Y_{1,x})\leqslant \mathrm{m}_1(Y_{2,x})\leqslant\ldots$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{m}_1(Y_{k,x})=\mathrm{m}_1(A_x).$$

Dal teorema di Levi, si ottiene

$$\lim_{k\to\infty}\int \mathrm{m}_1(Y_{k,x})\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{m}_1(A_x)\,\mathrm{d}x,$$

che, confrontata con la [5.2], dà la [5.1]. ∎

In maniera analoga (la dimostrazione viene lasciata per esercizio) si prova che per ogni compatto $K\subset\mathbf{R}^2$ si ha

$$\mathrm{m}_2(K)=\int \mathrm{m}_1(K_x)\,\mathrm{d}x. \qquad [5.3]$$

Teorema 5.1 *Sia $E\subset\mathbf{R}^2$ un insieme misurabile; si ha*

$$\mathrm{m}_2(E)=\int \mathrm{m}_1(E_x)\,\mathrm{d}x. \qquad [5.4]$$

Dimostrazione. Cominciamo col supporre che $m_2(E)<+\infty$. Siano $\{A_j\}$ e $\{K_j\}$ due successioni, la prima di aperti contenenti E, e la seconda di compatti contenuti in E, tali che

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_2(A_j) = \mathrm{m}_2(E),$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots, \quad \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_2(K_j) = \mathrm{m}_2(E).$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$A_{j,x} \supset E_x \supset K_{j,x}, \tag{5.5}$$

e

$$\mathrm{m}_2(E) = \lim_{j\to\infty} \int \mathrm{m}_1(A_{j,x})\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} \int \mathrm{m}_1(K_{j,x})\,\mathrm{d}x,$$

cosicché

$$\lim_{j\to\infty} \int \{\mathrm{m}_1(A_{j,x}) - \mathrm{m}_1(K_{j,x})\}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.6}$$

Se si pone

$$g_j(x) = \mathrm{m}_1(A_{j,x}) - \mathrm{m}_1(K_{j,x}),$$

la successione $\{g_j\}$ è una successione decrescente, con $0 \leqslant g_j(x) \leqslant g_1(x)$. Poiché g_1 è sommabile, si può applicare il teorema di Levi; si ha per la [5.6]

$$\int \{\lim_{j\to\infty} g_j(x)\}\,\mathrm{d}x = 0,$$

e quindi, per la proposizione 3.1,

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_1(A_{j,x}) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}_1(K_{j,x}) \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}. \tag{5.7}$$

Quest'ultima relazione, insieme alla [5.5], implica che E_x è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$. Inoltre si ha, per ogni intero j,

$$\mathrm{m}_2(K_j) = \int \mathrm{m}_1(K_{j,x})\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int} \mathrm{m}_1(E_x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int} \mathrm{m}_1(E_x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int \mathrm{m}_1(A_{j,x})\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{m}_2(A_j),$$

e passando al limite per $j \to \infty$ si ottiene la [5.4].

La [5.4] vale anche se $\mathrm{m}_2(E) = +\infty$. Infatti, posto $E^R = E \cap I_R$, risulta

$$\mathrm{m}_1(E_x) = \sup_{R>0} \mathrm{m}_1(E_x^R)$$

cosicché la funzione $\mathrm{m}_1(E_x)$ è misurabile. Inoltre

$$\mathrm{m}_2(E^R) = \int \mathrm{m}_1(E_x^R)\,\mathrm{d}x \leqslant \int \mathrm{m}_1(E_x)\,\mathrm{d}x$$

e la [5.4] si ottiene passando al limite per $R \to +\infty$. ■

Se si pone

$$E_y = \{x \in \mathbf{R} : (x, y) \in E\},$$

risulterà, con una dimostrazione del tutto analoga,

$$m_2(E) = \int m_1(E_y)\,dy.$$

In generale consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^{n+k} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, e indichiamo con $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$, un generico punto di $\mathbf{R}^{n+k}$. Se E è un insieme misurabile di $\mathbf{R}^{n+k}$ si ponga, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,

$$E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}$$

e per ogni $y \in \mathbf{R}^k$

$$E_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}.$$

Con una dimostrazione identica alla precedente si prova che

$$m_{n+k}(E) = \int_{\mathbf{R}^n} m_k(E_{\mathbf{x}})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^k} m_n(E_{\mathbf{y}})\,d\mathbf{y}. \qquad [5.8]$$

Esempio 5.1
Sia E un insieme normale rispetto all'asse delle y (vedi fig. 6.4)

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}.$$

Si ha

$$m_1(E_x) = \begin{cases} \beta(x) - \alpha(x) & \text{se} \quad a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

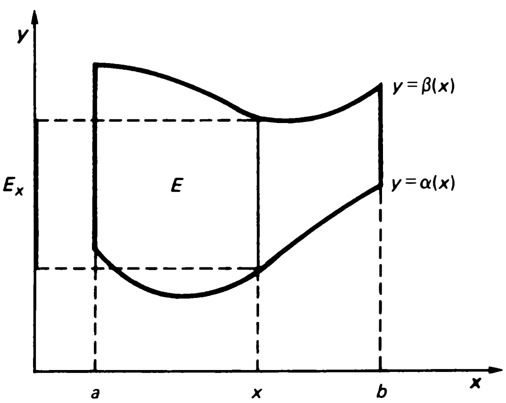

Figura 6.4

e dunque

$$m_2(E) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\,dx. \blacksquare$$

Esempio 5.2. Volume dei solidi di rotazione

Sia $f(z)$ una funzione non negativa, definita per $a<z<b$. Nel piano xz (vedi fig. 6.5) si consideri l'insieme

$$F = \{(x,z) : a<z<b; 0 \leqslant x < f(z)\},$$

e sia E l'insieme ottenuto ruotando F attorno all'asse z:

$$E = \{(x,y,z) : a<z<b; x^2 + y^2 < f^2(z)\}.$$

Per il teorema 5.1 sarà

$$m_3(E) = \int^b m_2(E_z)\,dz,$$

dove

$$E_z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x,y,z) \in E\}$$

è la proiezione sul piano xy dell'intersezione di E col piano orizzontale passante per z.

Per $a<z<b$ l'insieme E_z è un cerchio di raggio $f(z)$, e dunque

$$m_2(E_z) = \begin{cases} \pi f^2(z) & a<z<b \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

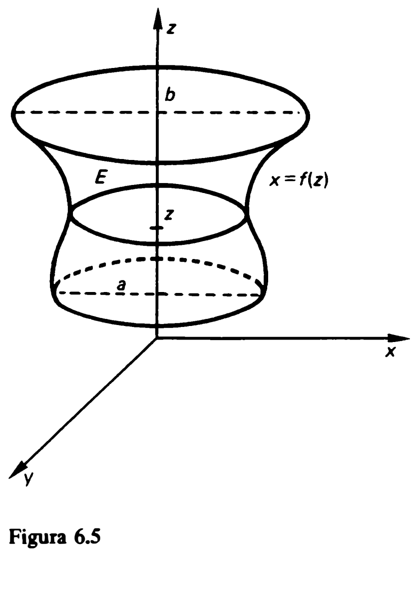

Figura 6.5

In definitiva,

$$m_3(E)=\pi\int_a^b f^2(z)\,dz.$$

Consideriamo ad esempio il solido ottenuto a partire dalla funzione

$$f(z)=\sin z,\quad 0<z<\pi.$$

Si ha

$$m_3(E)=\pi\int_0^\pi \sin^2 z\,dz=\frac{\pi^2}{2}.$$

Esempio 5.3. Misura della palla n-dimensionale
Indichiamo con I (vedi fig. 6.6) la palla n-dimensionale di raggio 1:

$$I=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : |\mathbf{x}|_n<1\}.$$

e sia

$$\omega_n=m_n(I).$$

Se si pone, per $0<t<1$,

$$I(t)=I\cap(\{t\}\times\mathbf{R}^{n-1})$$

l'insieme $I(t)$ è una palla n-1 dimensionale, di raggio $r(t)=(1-t^2)^{1/2}$ (vedi fig. 6.7).

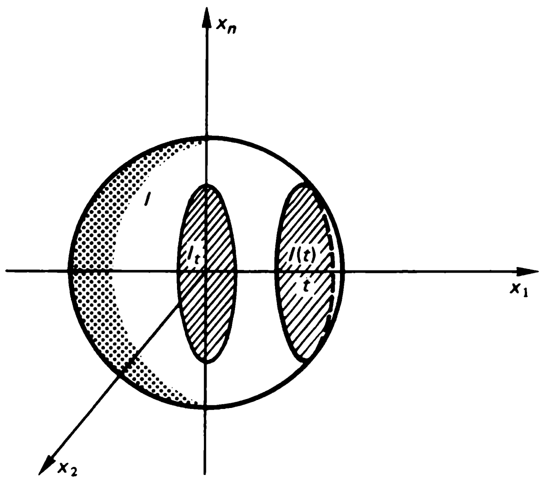

Figura 6.6

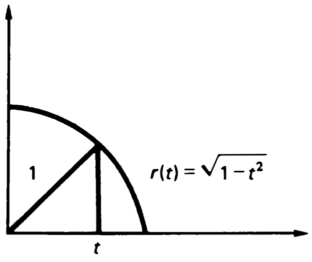

Figura 6.7

Se si indica con I_t la proiezione di $I(t)$ sull'iperpiano di equazione $x_1 = 0$, si ha

$$m_n(I) = \int m_{n-1}(I_t)\,dt.$$

D'altra parte, I_t è una palla a n-1 dimensioni di raggio $r(t)$ e dunque

$$m_{n-1}(I_t) = \omega_{n-1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

In definitiva

$$\omega_n = \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = 2\omega_{n-1}\int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du.$$

Ricordando la [5.4] del capitolo 5 (vol. 1) si ha

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2} u\,du.$$

Se n è pari ($n = 2k$), si ottiene

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k} u\,du = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3}{2k(2k-2)\dots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

mentre, se n è dispari ($n = 2k+1$),

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1} u\,du = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

In conclusione,

$$\omega_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\pi\,\omega_{2k-1},$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\,2\omega_{2k},$$

cosicché

$$\frac{\omega_{2k+1}}{\omega_{2k-1}}=2\pi\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)!!}=\frac{2\pi}{2k+1},$$

$$\frac{\omega_{2k}}{\omega_{2k-2}}=2\pi\frac{(2k-2)!!}{(2k)!!}=\frac{\pi}{k}.$$

Ricordando che $\omega_1=2$ e che $\omega_2=\pi$, si ricava infine

$$\omega_{2k}=\frac{\pi^k}{k!}$$

$$\omega_{2k+1}=\frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}. \blacksquare$$

Teorema 5.2 (di Fubini) *Sia $f(x,y)$ una funzione sommabile in $\mathbf{R}^2$. Allora*

(1) *per quasi tutti gli $x\in\mathbf{R}$ la funzione $y\to f(x,y)$ è sommabile in $\mathbf{R}$;*
(2) *la funzione*

$$g(x)=\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

è sommabile in $\mathbf{R}$;
(3) *risulta*

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \tag{5.9}$$

Analogamente, per quasi ogni $y\in\mathbf{R}$, esiste l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x=h(y),$$

e si ha

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y. \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che sia $f(x,y)\geqslant 0$. Per il teorema 3.1, l'insieme

$$\mathscr{F}_0=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:0<z<f(x,y)\}$$

è misurabile e si ha

$$\mathrm{m}_3(\mathscr{F}_0)=\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.11}$$

Dal teorema 5.1 segue che l'insieme

$$\mathscr{F}_{0,x}=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2:(x,y,z)\in\mathscr{F}_0\}=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2:0<z<f(x,y)\}$$

è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ e risulta

$$m_3(\mathscr{F}_0) = \int_{\mathbf{R}} m_2(\mathscr{F}_{0,x})\,dx.$$

D'altra parte, sempre per il teorema 3.1,

$$m_2(\mathscr{F}_{0,x}) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy,$$

e dalla [5.11] si ottiene immediatamente la [5.9].

La dimostrazione della [5.10] è identica alla precedente e viene lasciata per esercizio.

Infine se la funzione $f(x, y)$ è di segno variabile, basterà considerare le funzioni f^+ e f^-. ∎

Anche il teorema di Fubini ammette una generalizzazione a $\mathbf{R}^{n+k}$: se $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$, è un generico punto di $\mathbf{R}^{n+k}$ e $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è una funzione sommabile in $\mathbf{R}^{n+k}$, si ha

$$\int_{\mathbf{R}^{n+k}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbf{R}^k} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^k} d\mathbf{y} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}. \quad [5.12]$$

Esempio 5.4. Integrale esteso a un insieme normale

Sia

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}$$

e sia $f(x, y)$ una funzione integrabile in E. Se indichiamo al solito con f_E la funzione

$$f_E(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin E, \end{cases}$$

si ha, per il teorema di Fubini,

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^2} f_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} f_E(x,y)\,dy.$$

Se $x \notin (a, b)$ risulta $f_E(x,y) = 0$ per ogni y, cosicché

$$\int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} f_E(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{\mathbf{R}} f_E(x,y)\,dy.$$

D'altra parte, per ogni $x \in (a, b)$ la funzione $f_E(x, y)$ è nulla se $y \notin (\alpha(x), \beta(x))$ e coincide con $f(x,y)$ se $y \in (\alpha(x), \beta(x))$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}} f_E(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

In conclusione

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad [5.13]$$

Esempio 5.5
Si calcoli (vedi fig. 6.8)

$$\int_E xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove

$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}.$$

Si ha

$$\int_E xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^5)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}. \ ■$$

Se l'insieme E è normale rispetto all'asse delle x,

$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : c<y<d, \gamma(y)<x<\delta(y)\},$$

si ha l'analoga della [5.13]:

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

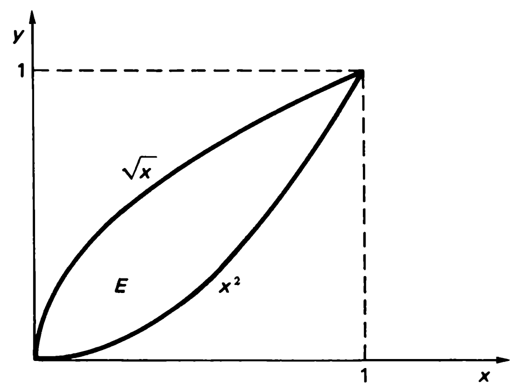

Figura 6.8

Esempio 5.6
Sia A l'insieme in figura 6.9; si calcoli

$$\int_A x(1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si ha

$$A=\{(x,y):0<y<1/\sqrt{2};y<x<\sqrt{1-y^2}\},$$

e dunque

$$\int_A x(1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{1/\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}x(1-y)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{1/\sqrt{2}}\mathrm{d}y\left[\frac{1}{2}x^2(1-y)\right]_{x=y}^{x=\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}[(1-y^2)-y^2](1-y)\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{16}.$$

Si osservi che l'insieme A è normale anche rispetto all'asse delle y

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<x<1,0<y<q(x)\},$$

dove

$$q(x)=\begin{cases}x & \text{se } 0<x\leqslant 1/\sqrt{2}\\ \sqrt{1-x^2} & \text{se } 1/\sqrt{2}<x<1.\end{cases}$$

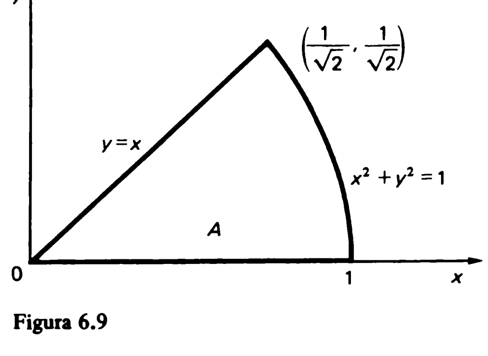

Figura 6.9

Si ha dunque

$$\int_E x(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{q(x)} x(1-y)\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_0^x x(1-y)\,dy +$$
$$+ \int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x(1-y)\,dy.$$

Il calcolo degli ultimi due integrali viene lasciato per esercizio; è evidente che il risultato dovrà essere lo stesso nei due casi. ■

I metodi degli esempi precedenti si estendono al caso di più variabili; ad esempio, se F è un insieme di $\mathbf{R}^2$ e se

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x,y) \in F, \alpha(x,y) < z < \beta(x,y)\},$$

risulterà

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_F dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

cosicché il calcolo di un integrale triplo è ridotto a quello di un integrale semplice e, successivamente, di uno doppio.

Esempio 5.7
Sia (vedi fig. 6.10)

$$T = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}.$$

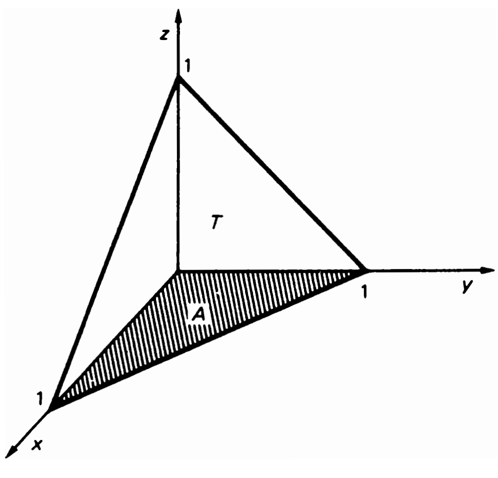

Figura 6.10

Si calcoli

$$\int_T (x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Si vede facilmente che

$$T=\{(x,y,z):(x,y)\in A,\, 0<z<1-x-y\},$$

dove

$$A=\{(x,y):x>0,y>0,x+y<1\}=\{(x,y):0<x<1,0<y<1-x\}.$$

Si ha allora

$$\int_T (x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+z)\,\mathrm{d}z=\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[xz+\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x-y}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_A (1-y+x)(1-y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}[(1-y)^2-x^2]\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left[-\frac{1}{3}(1-y)^3-x^2y\right]_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-x^2+\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.$$

Osserviamo che si sarebbe ottenuto lo stesso risultato integrando prima rispetto a y:

$$\int_T (x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(x+z)\,\mathrm{d}y=\int_B (x+z)(1-x-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

dove

$$B=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2:0<x<1,0<z<1-x\},$$

o anche eseguendo in primo luogo l'integrazione rispetto a x. Lasciamo per esercizio l'esecuzione dei calcoli in questi casi.

Esercizi

5.1 Calcolare i seguenti integrali, nei quali gli insiemi A sono dati in figura 6.11:

(a) $$\int_A (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

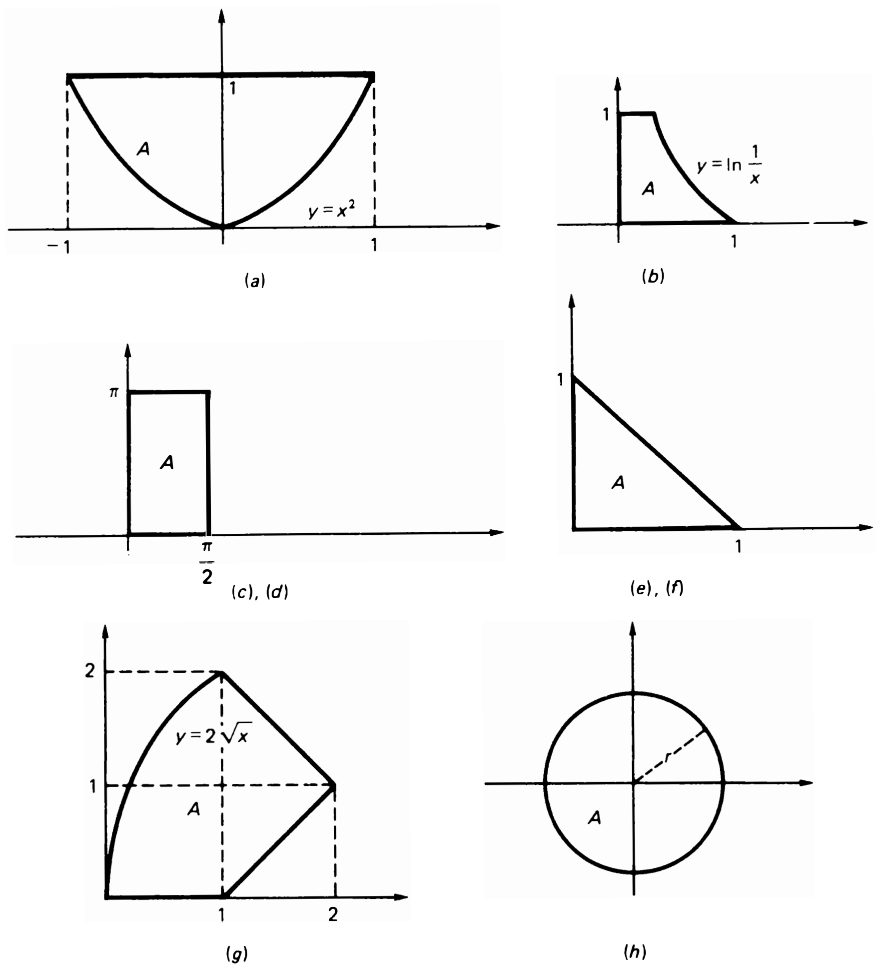

Figura 6.11

(b) $\displaystyle\int_A xy \, dx \, dy$

(c) $\displaystyle\int_A e^{x+y} \, dx \, dy$

(d) $\displaystyle\int_A xy \cos(x+y) \, dx \, dy$

(e) $\displaystyle\int_A x^2 e^{xy} \, dx \, dy$

(f) $\displaystyle\int_A x(y+\sin \pi y) \, dx \, dy$

(g) $\displaystyle\int_A (1+x+y)^{-2}\,dx\,dy$

(h) $\displaystyle\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$

5.2 Si disegnino schematicamente gli insiemi sotto indicati, e se ne trovi la misura:

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x\geqslant 0, y\geqslant 0, 0\leqslant y\leqslant 4-x^2-z^2\}$$
$$B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : -1<x<2; x^2<y<x+2\}$$
$$C=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 1/2, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$
$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : -1\leqslant y\leqslant 1, |y|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}\}$$
$$E=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : |x|+|y|+|z|<2, |x|<1, |y|<1\}.$$

5.3 Se A è un insieme di $\mathbf{R}^n$ si chiama *baricentro* di A il punto di coordinate

$$\bar{x}_i=\frac{1}{\mathrm{m}(A)}\int_A x_i\,d\mathbf{x}.$$

Trovare il baricentro degli insiemi considerati negli esercizi 5.1 e 5.2.

5.4 Si disegnino schematicamente i solidi ottenuti ruotando intorno all'asse z gli insiemi che seguono, e se ne calcoli il volume:

(a) $F=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2 : 0<z<1, 0<x<\sqrt{z}\}$ (paraboloide di rotazione)
(b) $F=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2 : 1<z<2, 0<x<\ln z\}$
(c) $F=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2 : 0<z<1, 1+z<x<e^z\}$
(d) $F=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2 : 0<z<2, 0<x<\min(z,\sqrt{2-z})\}$.

5.5 Si trovino i volumi dei solidi ottenuti ruotando intorno all'asse verticale gli insiemi dell'esercizio 5.1.

5.6 Il momento d'inerzia di un solido omogeneo $E\subset\mathbf{R}^3$ rispetto a una retta r è

$$I_r=\int_E [\mathrm{dist}(x,r)]^2\,dx,$$

dove $\mathrm{dist}(x,r)$ indica la distanza del punto x dalla retta r.
Dimostrare che il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z è

$$I_z=\int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Trovare le analoghe espressioni dei momenti I_x e I_y.

5.7 Sia E un solido di rotazione, ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme

$$F=\{(x,z)\in\mathbf{R}^2 : a<z<b, 0<x<f(z)\}.$$

Dimostrare che

$$I_z = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(z)\,\mathrm{d}z.$$

5.8 Si trovino i momenti d'inerzia rispetto all'asse z dei solidi degli esercizi 5.4 e 5.5.

6 Cambiamento della misura per diffeomorfismi

Siano A e B due aperti di $\mathbf{R}^n$. Un'applicazione $g: A \to B$ si dice un *diffeomorfismo di classe* C^1 (o brevemente un *diffeomorfismo*) se:

(1) g è iniettiva;
(2) $g(A) = B$;
(3) g e la sua inversa $g^{-1}: B \to A$ sono di classe C^1 (e cioè sono differenziabili con derivate continue).

Se g è un diffeomorfismo e $\mathbf{x}_0 \in A$, sia $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0) \in B$. Indichiamo con $J_g(\mathbf{x}_0)$ e $J_{g^{-1}}(\mathbf{y}_0)$ le matrici jacobiane di g e g^{-1} nei punti $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ rispettivamente (vedi cap. 4, [4.6]).

Si ha $g^{-1} \circ g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e quindi per la [4.12] del capitolo 4.

$$J_{g^{-1}}(\mathbf{y}_0) J_g(\mathbf{x}_0) = I, \qquad [6.1]$$

dove si è indicata con I la matrice unità di ordine n, di elementi

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dalla [6.1] segue che

$$[J_g(\mathbf{x}_0)]^{-1} = J_{g-1}(\mathbf{y}_0)$$

e quindi la matrice jacobiana di g non è mai singolare, da che si ha

$$\det J_g(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{in } A, \quad \det J_{g-1}(\mathbf{y}) \neq 0 \quad \text{in } B. \qquad [6.2]$$

Ciò premesso, sia E un insieme misurabile contenuto in A. Lo scopo di questo paragrafo è di calcolare la misura dell'insieme $g(E)$, immagine di E tramite il diffeomorfismo g.

Dimostreremo il seguente

Teorema 6.1 *Se E è misurabile, $g(E)$ è misurabile e risulta*

$$m(g(E)) = \int_E |\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [6.3]$$

La dimostrazione del teorema 6.1 verrà fatta per gradi, e prenderà tutto il paragrafo.

Cominciamo dal caso particolare in cui g è un'applicazione lineare. In questo caso esiste una matrice L tale che

$$g(\mathbf{x}) = L\,\mathbf{x},$$

o in maniera esplicita

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se g è lineare si ha ovviamente

$$J_g = L. \tag{6.4}$$

Lemma 6.1 *Sia* $g(\mathbf{x}) = L\,\mathbf{x}$ *un'applicazione lineare non singolare di* $\mathbf{R}^n$ *in* $\mathbf{R}^n$, *e sia* K *un compatto di* $\mathbf{R}^n$. *In tal caso*

$$\mathrm{m}(g(K)) = |\det L|\, \mathrm{m}(K). \tag{6.5}$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare la [6.5] nel caso di applicazioni lineari di tipo speciale.

(a) g è l'applicazione che scambia tra loro le componenti x_i e x_k

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = x_k, & g_k(\mathbf{x}) = x_i, \\ g_j(\mathbf{x}) = x_j & j \neq i, k. \end{cases}$$

Una tale trasformazione manda intervalli in intervalli (e quindi plurintervalli in plurintervalli) lasciandone inalterata la misura. Si vede allora facilmente che

$$\mathrm{m}(g(K)) = \mathrm{m}(K),$$

per ogni compatto K. D'altra parte, per una trasformazione g del tipo descritto, risulta $|\det L| = 1$ e dunque sussiste la [6.5].

(b) La matrice L è diagonale, cioè si ha

$$g_i(\mathbf{x}) = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se I è un intervallo (e quindi anche se I è un plurirettangolo) risulta (vedi fig. 6.12)

$$\mathrm{m}(g(I)) = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n|\, \mathrm{m}(I), \tag{6.6}$$

e quindi la [6.6] sarà valida anche per i compatti. Poiché

$$\det L = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n,$$

la [6.5] è verificata anche in questo caso.

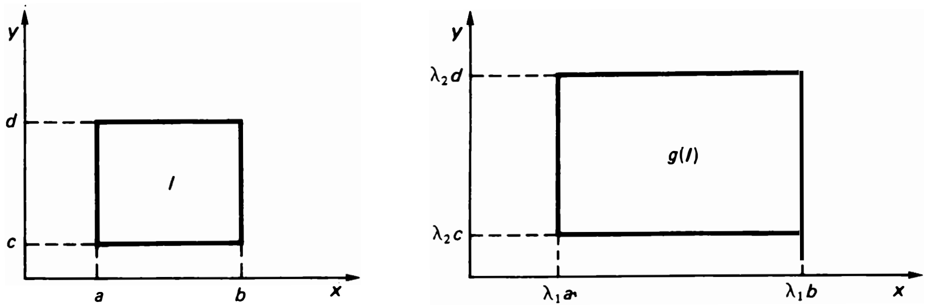

Figura 6.12

(c) La trasformazione g è del tipo seguente:

$$\begin{cases} g_k(\mathbf{x}) = x_k + \lambda x_j \\ g_i(\mathbf{x}) = x_i \qquad\qquad i \neq k \end{cases}$$

o in forma vettoriale,

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \lambda x_j \mathbf{e}_k.$$

Possiamo supporre $j \neq k$ (altrimenti si ricade nel caso precedente); per fissare le idee supporremo $j=1$. Sia $Q = g(K)$ (vedi fig. 6.13), e per ogni $u \in \mathbf{R}$, sia

$$Q_u = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n-1} : (u, \mathbf{x}') \in Q\},$$

$$K_u = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n-1} : (u, \mathbf{x}') \in K\}.$$

Per ogni u, Q_u coincide con l'insieme K_u traslato di λu nella direzione $\mathbf{e}_k$:

$$Q_u = \tau_{\lambda u \mathbf{e}_k} K_u,$$

e dunque (vedi cap. 5, esercizio 2.8)

$$\mathrm{m}_{n-1}(Q_u) = \mathrm{m}_{n-1}(K_u).$$

Ma allora

$$\mathrm{m}_n(Q) = \int \mathrm{m}_{n-1}(Q_u)\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{m}_{n-1}(K_u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{m}_n(K),$$

e, dato che $\det L = 1$, la [6.5] è dimostrata anche in questo caso.

Abbiamo così dimostrato la [6.5] nel caso di trasformazioni *elementari*, cioè di uno dei tre tipi descritti.

Osserviamo ora che se la [6.5] vale per due trasformazioni lineari g e h, vale anche per la loro composizione. Infatti, se L ed M sono le matrici di g e h, LM sarà la matrice di $g \circ h$, e dunque

$$\mathrm{m}(g \circ h(K)) = |\det L|\,\mathrm{m}(h(K)) = |\det L|\,|\det M|\,\mathrm{m}(K) = |\det LM|\,\mathrm{m}(K).$$

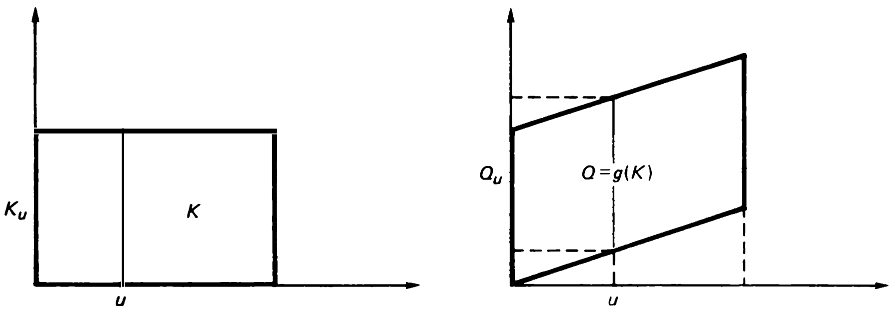

Figura 6.13

Per concludere la prova del lemma sarà allora sufficiente dimostrare il seguente

Lemma 6.2 *Ogni trasformazione lineare non singolare è prodotto di trasformazioni elementari.*

Dimostrazione. Dimostreremo questa affermazione per induzione sulla dimensione n dello spazio. L'esempio 6.1 che segue mostra che essa sussiste per $n=2$. Supponiamo ora che sia vera per $n-1$ e dimostriamola per n.

Sia $L=\{a_{ij}\}$ una matrice $n \times n$ non singolare. Poiché non può essere $a_{in}L^{in}=0$ per ogni i (L^{in} è il determinante della matrice ottenuta eliminando la riga i-esima e l'ultima colonna), potremo supporre, scambiando eventualmente due variabili che sia $a_{nn}L^{nn} \neq 0$. Dato un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, indicheremo con $\bar{\mathbf{x}}$ il vettore di $\mathbf{R}^{n-1}$ di componenti $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, e porremo $\bar{L}=L^{nn}$. Per induzione, la trasformazione $\bar{\mathbf{x}} \to \bar{L}\bar{\mathbf{x}}$, e dunque anche quella che manda $\mathbf{x}=(\bar{\mathbf{x}}, x_n)$ in $(\bar{L}\bar{\mathbf{x}}, x_n)$ si può scrivere come prodotto di trasformazioni elementari.

Moltiplicando x_n successivamente per $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n}$ e sommando rispettivamente alla prima, seconda $(n-1)$-esima riga (tipo (c)) si passa a $(\bar{L}\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{a}}x_n, x_n)$, dove si è indicato con $\bar{\mathbf{a}}$ il vettore di $\mathbf{R}^{n-1}$ di componenti $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n})$. Abbiamo così sistemato le prime $n-1$ righe; resta da trasformare l'ultima.

Con una trasformazione di tipo (b) si giunge a $(\bar{L}\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{a}}x_n, bx_n)$, dove b è un numero che sceglieremo più tardi. Osserviamo ora che la matrice $\bar{L}$ non è singolare; sia $M=\bar{L}^{-1}$ la sua inversa, e sia $\mathbf{w}=\bar{L}\bar{\mathbf{x}}+\bar{\mathbf{a}}x_n$. Si ha

$$(M\mathbf{w})_i = x_i + x_n \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}a_{jn}$$

e quindi moltiplicando la riga i-esima per $\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}m_{ki}$ e sommando i risultati all'ultima, questa diventa:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}x_k + \left(b + \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ni}m_{ik}a_{kn}\right) x_n .$$

Scegliendo b in modo che il termine tra parentesi sia uguale ad a_{nn} si ottiene la trasformazione L come prodotto di trasformazioni elementari. ■

Abbiamo così dimostrato la [6.5] per ogni trasformazione lineare. Osserviamo ora che la misura è invariante per traslazioni (vedi cap. 5, esercizio 2.8) e quindi, se $G(\mathbf{x})$ è una trasformazione affine

$$G(\mathbf{x})=L\mathbf{x}+\mathbf{y}_0,$$

si avrà ancora

$$\mathrm{m}(G(K))=|\det L|\,\mathrm{m}(K). \tag{6.7}$$

Esempio 6.1
La generica trasformazione lineare di $\mathbf{R}^2$ in sé è data da

$$g:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}=A\mathbf{x}.$$

Se g è non singolare deve essere $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$, per cui dovrà essere $a_{11}\neq0$, oppure $a_{21}\neq0$. Supponiamo per fissare le idee che sia $a_{11}\neq0$. Allora g si scrive come composizione di quattro trasformazioni elementari nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\underset{g_1}{\to}\begin{pmatrix}a_{11}x_1\\x_2\end{pmatrix}\underset{g_2}{\to}\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\x_2\end{pmatrix}\underset{g_3}{\to}\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\(a_{22}-a_{12}a_{21}/a_{11})x_2\end{pmatrix}\underset{g_4}{\to}$$

$$\to\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}.$$

Si verifichi che ognuna delle trasformazioni $g_1,\dots,g_4$ è di tipo elementare e per ognuna di esse si calcoli la matrice associata. ■

Esempio 6.2. Misura di un parallelepipedo in n dimensioni
Dati in $\mathbf{R}^n$ n vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ linearmente indipendenti, l'insieme

$$P=\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n:\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{v}_i,\ 0\leqslant x_i\leqslant1\}$$

è un parallelepipedo in $\mathbf{R}^n$, generato da $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$.

Se si indica con L la matrice le cui colonne sono formate dai vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$, e si pone

$$g(\mathbf{x})=L\mathbf{x},$$

si ha

$$P=g(I_0),$$

dove I_0 è un cubo n-dimensionale di lato 1:

$$I_0 = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

Si ha allora

$$m(P) = |\det L|.$$

In particolare, se $n = 3$, indichiamo i tre vettori linearmente indipendenti con **u**, **v** e **w** (vedi fig. 6.14).

Si ha

$$m(P) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right| = |(\mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})|,$$

dove si indica con $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ il *prodotto vettoriale* o *prodotto esterno* dei vettori **v** e **w** e cioè il vettore di componenti

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \blacksquare$$

Torniamo alla dimostrazione del teorema 6.1. Il secondo passo consiste nel dimostrare la [6.3] nel caso in cui E è un intervallo.

Stabiliamo dapprima alcune notazioni. Indichiamo con Q il cubo in $\mathbf{R}^n$ di centro x_0 e lato $2p$ (vedi fig. 6.15)

$$Q = Q(x_0, p) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i - x_{0i}| \leqslant p; i = 1, 2, \dots, n\},$$

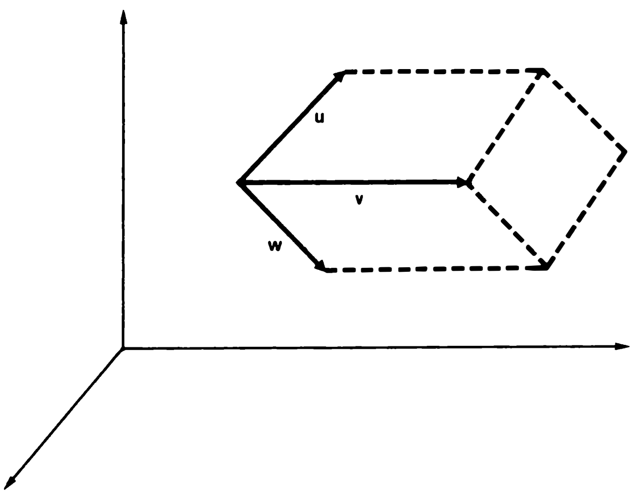

Figura 6.14

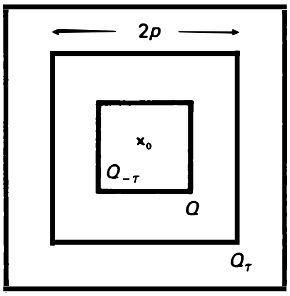

Figura 6.15

e per $0 \leqslant \tau < 1$ siano Q_τ e $Q_{-\tau}$ i cubi, concentrici a Q, di lato $2(1+\tau)p$ e $2(1-\tau)p$ rispettivamente:

$$\begin{cases} Q_\tau = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |x_i - x_{0i}| \leqslant (1+\tau)p; i=1,2,\dots,n\} \\ Q_{-\tau} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |x_i - x_{0i}| \leqslant (1-\tau)p; i=1,2,\dots,n\}. \end{cases} \qquad [6.8]$$

Dato un diffeomorfismo $g : A \to B$, indichiamo con G l'applicazione affine

$$G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + \mathrm{d}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Si ha

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 + L\mathbf{x}, \qquad [6.9]$$

dove

$$L = J_g(\mathbf{x}_0),$$

e

$$\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0) - L\mathbf{x}_0.$$

Se K è un compatto contenuto in A, poniamo

$$4d = \mathrm{dist}(K, \mathbf{R}^n - A)$$

(se $A = \mathbf{R}^n$ si pone $d=1$). L'insieme

$$K_d = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, K) \leqslant d\}$$

è anch'esso un compatto contenuto in A.

Lemma 6.2 *Esistono due costanti positive ν e N tali che, per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \in K$, *risulta*

$$\nu|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \leqslant |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_1)| \leqslant N|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|. \qquad [6.10]$$

Dimostrazione. Se $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \geqslant d$, allora

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_1)| \leqslant 2 \sup_{\mathbf{y} \in K} |g(\mathbf{y})| \leqslant 2 \sup_{\mathbf{y} \in K} |g(\mathbf{y})| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|/d = N_1 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|.$$

Supponiamo ora che $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|<d$. In questo caso il segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_1$ è interamente contenuto in K_d. Ricordando la formula di Taylor (vedi cap. 4, [3.7] con $k=0$) si ottiene

$$g_i(\mathbf{x})=g_i(\mathbf{x}_1)+(\mathrm{D}g_i(\boldsymbol{\xi}_i),\mathbf{x}-\mathbf{x}_1),\qquad i=1,\ldots,n, \qquad [6.11]$$

dove $\boldsymbol{\xi}_i$ è un punto del segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_1$, e quindi in definitiva un punto di K_d. Si ha allora

$$|g_i(\mathbf{x})-g_i(\mathbf{x}_1)|\leqslant \sup_{y\in K_d}|\mathrm{D}g_i(\mathbf{y})||\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|,\qquad i=1,\ldots,n,$$

e dunque

$$|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}_1)|\leqslant N_2|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|,$$

da cui segue la seconda delle disuguaglianze [6.10], con $N=\max(N_1,N_2)$.

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, sia $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y}_1=g(\mathbf{x}_1)$. Si ha $\mathbf{x}=g^{-1}(\mathbf{y})$ e $\mathbf{x}_1=g^{-1}(\mathbf{y}_1)$; con lo stesso ragionamento di prima (si osservi che $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_1$ appartengono al compatto $g(K)\subset B$) si ricava

$$|g^{-1}(\mathbf{y})-g^{-1}(\mathbf{y}_1)|\leqslant P|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1|,$$

e tornando a $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, si ottiene la prima delle [6.10] con $\nu=P^{-1}$. ■

In maniera del tutto analoga si dimostra che esistono due costanti positive μ e M tali che, per ogni $\mathbf{x}_0\in K$ e per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^1\in\mathbf{R}^n$:

$$\mu|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|\leqslant|G(\mathbf{x})-G(\mathbf{x}_1)|\leqslant M|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|. \qquad [6.12]$$

Lemma 6.3 *Per ogni* $\tau>0$, *esiste un* δ, $0<\delta<d$, *tale che, se* $\mathbf{x}_0\in K$ *e* $\operatorname{diam} Q= =2p\sqrt{n}<\delta$, *allora*

$$G(Q_{-\tau})\subset g(Q)\subset G(Q_\tau). \qquad [6.13]$$

Dimostrazione. Dalla [6.11], scritta con $\mathbf{x}_0$ al posto di $\mathbf{x}_1$, segue

$$g_i(\mathbf{x})-G_i(\mathbf{x})=(\mathrm{D}g_i(\boldsymbol{\xi}_i)-\mathrm{D}g_i(\mathbf{x}_0),\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

per ogni $\mathbf{x}$ tale che il segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$ sia interamente contenuto in A, $\boldsymbol{\xi}_i$ essendo un punto di tale segmento.

Poiché Dg_i è continuo, per ogni $\epsilon>0$ esiste un δ, $0<\delta<d$, tale che se $\mathbf{x}_0\in K$ e $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$, allora

$$|g_i(\mathbf{x})-G_i(\mathbf{x})|<\epsilon|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|/\sqrt{n},$$

e dunque

$$|g(\mathbf{x})-G(\mathbf{x})|<\epsilon|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|. \qquad [6.14]$$

Ciò premesso, cominciamo col dimostrare la seconda delle inclusioni [6.13]. Per questo prenderemo $\epsilon=\epsilon_1=\mu\tau/\sqrt{n}$, e indicheremo con δ_1 il δ corrispondente.

Sia $\mathbf{y} \in g(Q)$ e $\mathbf{x}_1 = G^{-1}(\mathbf{y})$. Occorrerà far vedere che $\mathbf{x}_1 \in Q_\tau$. Poniamo $\mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{y})$. Si avrà $\mathbf{x} \in Q$ e quindi, per la [6.12],

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}| \leqslant \mu^{-1} |G(\mathbf{x}_1) - G(\mathbf{x})| = \mu^{-1} |g(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})|.$$

Se diam $Q < \delta_1$ si avrà $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_1$ e quindi, per la [6.14],

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}| < \epsilon_1 \mu^{-1} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \frac{\tau}{\sqrt{n}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant \tau p.$$

Ma allora, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$|x_{1i} - x_{0i}| \leqslant |x_{1i} - x_i| + |x_i - x_{0i}| < \tau p + p = (1 + \tau) p,$$

cosicché $\mathbf{x}_1 \in Q_\tau$ e la seconda inclusione è dimostrata.

In modo simile si dimostra la prima inclusione. Sia $\mathbf{y} \in G(Q_{-\tau})$, e siano $\mathbf{x} = G^{-1}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x}_1 = g^{-1}(\mathbf{y})$. I punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_1$ appartengono all'insieme compatto

$$K_d \cup g^{-1}(G(K_d)).$$

Per il lemma 6.2 esisterà una costante positiva ν tale che

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \leqslant \nu^{-1} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_1)| = \nu^{-1} |g(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})|.$$

Si prenda $\epsilon_2 = \tau \nu / \sqrt{n}$. Se $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_2$ risulterà

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| < \nu^{-1} \epsilon_2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \frac{\tau}{\sqrt{n}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \tau p (1 - \tau) < \tau p,$$

e ragionando come sopra si conclude che $\mathbf{x}_1 \in Q$, e quindi la prima inclusione [6.13]. Il teorema è così dimostrato con $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. ∎

Siamo ora pronti a dimostrare che se I è un intervallo contenuto in A, allora

$$\mathrm{m}(g(I)) = \int_I |\det J_g(\mathbf{x})| \, dx. \qquad [6.15]$$

Usiamo il lemma precedente con $K = I$; se $\tau > 0$ e Q è un cubo con centro $\mathbf{x}_0 \in I$ e diametro inferiore a δ, risulta

$$\mathrm{m}(G(Q_{-\tau})) \leqslant \mathrm{m}(g(Q)) \leqslant \mathrm{m}(G(Q_\tau))$$

e, poiché G è una trasformazione affine,

$$(1 - \tau)^n \, |\det J_g(\mathbf{x}_0)| \, \mathrm{m}(Q) \leqslant \mathrm{m}(g(Q)) \leqslant (1 + \tau)^n \, |\det J_g(\mathbf{x}_0)| \, \mathrm{m}(Q). \qquad [6.16]$$

D'altra parte la funzione $|\det J_g(\mathbf{x})|$ è continua in I (e quindi uniformemente continua); ne segue che esiste un numero positivo δ' tale che, se diam $Q < \delta'$, si ha

$$\max_{x \in Q} |\det J_g(\mathbf{x})| - \min_{x \in Q} |\det J_g(\mathbf{x})| < \tau. \qquad [6.17]$$

Supponiamo ora che I abbia lati razionali. Si può allora dividere I in un numero finito in cubi $Q_1, Q_2, ..., Q_N$, di centri $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$, e tutti di diametro minore del minimo tra δ e δ'.

Dalle [6.16] e [6.17], scritte per il cubo Q_i, si ottiene

$$(1-\tau)^n (M_i - \tau)\mathrm{m}(Q_i) \leqslant \mathrm{m}(g(Q_i)) \leqslant (1+\tau)^n (\mathrm{m}_i + \tau)\mathrm{m}(Q_i),$$

dove si è posto

$$m_i = \min_{Q_i} |\det J_g(\mathbf{x})|,$$

$$M_i = \max_{Q_i} |\det J_g(\mathbf{x})|.$$

Sommando da 1 a N,

$$(1-\tau)^n \sum_{i=1}^{N} M_i \,\mathrm{m}(Q_i) - \tau(1-\tau)^n \,\mathrm{m}(I) \leqslant \mathrm{m}(g(I)) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\tau)^n \sum_{i=1}^{N} m_i \mathrm{m}(Q_i) + \tau(1+\tau)^n \,\mathrm{m}(I).$$

D'altra parte, per la definizione stessa di integrale, si ha

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathrm{m}(Q_i) \leqslant \int_I |\det J_g(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \sum_{i=1}^{N} M_i \mathrm{m}(Q_i),$$

e dunque

$$(1-\tau)^n \left\{ \int_I |\det J_g(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \tau \mathrm{m}(I) \right\} \leqslant \mathrm{m}(g(I)) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\tau)^n \left\{ \int_I |\det J_g(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \tau \mathrm{m}(I) \right\},$$

e la [6.15] si ottiene passando al limite per $\tau \to 0$.

Se poi I non ha lati razionali basterà approssimare I con una successione I_k di intervalli con lati razionali, e passare al limite per $k \to \infty$. ■

Una volta provata la [6.15] si può senz'altro passare alla dimostrazione del teorema 6.1. Cominciamo con l'osservare che la [6.3] vale per i plurintervalli. Come ormai è usuale, dimostreremo la [6.3] prima per insiemi aperti e compatti, per poi estenderla a insiemi misurabili qualsiasi.

(1) Sia K un compatto contenuto in A. Esiste una successione di plurintervalli Y_j, con

$$A \supset Y_1 \supset Y_2 \supset ...; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_j = K.$$

Gli insiemi $g(Y_j)$ sono compatti, e risulta

$$B \supset g(Y_1) \supset g(Y_2) \supset ...; \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} g(Y_j) = g(K),$$

per cui (vedi cap. 5, esercizio 3.4):

$$\mathrm{m}(g(K)) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(g(Y_j)).$$

D'altra parte, per il teorema di Levi (si tenga presente che $|\det J_g|$ è continua, e dunque limitata in Y_1)

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(g(Y_j)) = \lim_{j\to\infty} \int_{Y_j} |\det J_g(x)|\, dx = \int_K |\det J_g(x)|\, dx,$$

cosicché la [6.3] vale anche per insiemi compatti.
(2) Con un procedimento del tutto analogo, che viene lasciato per esercizio, si dimostra la [6.3] per insiemi aperti.
(3) Sia ora E un insieme misurabile e limitato, con $\overline{E} \subset A$, e siano A_j e K_j due successioni, la prima di aperti contenenti E e la seconda di compatti contenuti in E, tali che

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots; \quad \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(A_j) = \mathrm{m}(E),$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots; \quad \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(K_j) = \mathrm{m}(E).$$

Poiché E è limitato ed $\overline{E} \subset A$, si potrà supporre che anche A_1 sia limitato, e che $\overline{A}_1 \subset A$.

Si ha, per ogni j,

$$\mathrm{m}(g(A_j)) \geqslant \overline{\mathrm{m}}(g(E)) \geqslant \underline{\mathrm{m}}(g(E)) \geqslant \mathrm{m}(g(K_j)).$$

D'altra parte

$$0 \leqslant \mathrm{m}(g(A_j)) - \mathrm{m}(g(K_j)) = \int_{A_j - K_j} |\det J_g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant \mathrm{m}(A_j - K_j) \sup_{A_1} |\det J_g|$$

e, poiché $\lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(A_j - K_j) = 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \{\mathrm{m}(g(A_j)) - \mathrm{m}(g(K_i))\} = 0.$$

In conclusione, $g(E)$ è misurabile e si ha

$$\mathrm{m}(g(E)) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(g(A_j)) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{m}(g(K_j)). \qquad [6.18]$$

Si osservi ora che la [6.3] è valida per gli insiemi A_j e K_j per cui

$$\mathrm{m}(g(K_j)) = \int_{K_j} |\det J_g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E |\det J_g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{A_j} |\det J_g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} =$$
$$= \mathrm{m}(g(A_j)),$$

e per la [6.18]

$$m(g(E)) = \int_E |\det J_g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}. \tag{6.19}$$

(4) Infine, se E non è limitato, o se $\overline{E}$ non è contenuto in A, posto $A_r = \{\mathbf{x} \in A : : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial A) > 1/r\}$, basterà scrivere la [6.19] per $E \cap I_r \cap A_r$ e passare al limite per $r \to \infty$.

Il teorema 6.1 è così completamente dimostrato. ■

Osservazione 6.1. Se si pone $g(E) = F$, la [6.3] diventa

$$m(F) = \int_{g^{-1}(F)} |\det J_g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}; \tag{6.20}$$

questa forma è in genere più utile per il calcolo della misura di un insieme.

Dato un insieme F, si tratterà di trovare un diffeomorfismo g tale che l'integrale a secondo membro della [6.20] sia calcolabile con relativa facilità.

In genere ciò dipenderà dall'insieme $g^{-1}(F)$; si cercherà allora di scegliere l'applicazione g in modo che $g^{-1}(F)$ sia un insieme il più semplice possibile (ad esempio un intervallo, o comunque un insieme normale).

In pratica, si cerca un diffeomorfismo γ di F in $\mathbf{R}^n$ tale che $\gamma(F)$ sia il più semplice possibile, e poi si prende $g = \gamma^{-1}$. ■

Esempio 6.3

Si calcoli l'area dell'insieme E raffigurato nella figura 6.16.

Si ha

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y < 2x; 1 < xy < 2\}.$$

La trasformazione

$$\gamma : \begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$$

manda E nel quadrato

$$Q = \gamma(E) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : 1 < u < 2; 1 < v < 2\}.$$

La trasformazione inversa $g = \gamma^{-1}$ è data da

$$g : \begin{cases} x = \sqrt{u/v} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

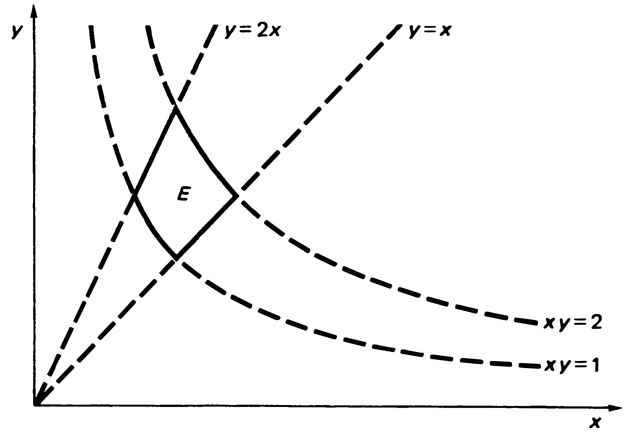

Figura 6.16

e si ha

$$J_g = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{u\,v}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\,v\sqrt{v}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\det J_g = \frac{1}{2v} > 0,$$

e quindi

$$\mathrm{m}(E) = \int_Q \frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Esercizi

6.1 Dimostrare che le trasformazioni di tipo (a) si possono ottenere come composizione di trasformazioni di tipo (b) e (c).

7 Cambiamento di variabili negli integrali

Teorema 7.1 *Siano A e B due aperti di $\mathbf{R}^n$ e sia g un diffeomorfismo tra A e B. Sia E un insieme misurabile contenuto in B e sia $f(\mathrm{y})$ una funzione integrabile in E.*

La funzione composta $F(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ *è integrabile in* $g^{-1}(E)$ *e si ha*

$$\int_E f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{g^{-1}(E)} f(g(\mathbf{x}))\,|\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [7.1]$$

La [7.1] contiene come caso particolare (con $f = 1$) i risultati del paragrafo precedente e in particolare la [6.20]. Come abbiamo osservato in precedenza, la [7.1] può essere usata per calcolare l'integrale a primo membro. Infatti, se si sceglie opportunamente il diffeomorfismo g, l'insieme $g^{-1}(E)$ può essere notevolmente più semplice dell'insieme di partenza E, e l'integrale a secondo membro della [7.1] può risultare più facile da calcolare di quello a primo membro.

Esempio 7.1

Si calcoli l'integrale

$$\int_E (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove E è l'insieme dell'esempio 6.3.

Si ha

$$\int_E (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_Q (\sqrt{u/v} + \sqrt{uv})/2v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \int_1^2 (v^{-3/2} + v^{-1/2})\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{2}). \blacksquare$$

Esempio 7.2

Si calcoli

$$\int_E \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy},$$

dove E è l'insieme della figura 6.17.

Se si pone

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y/x, \end{cases}$$

l'applicazione $\gamma : (x, y) \to (u, v)$ manda E nel rettangolo

$$R = \gamma(E) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : 1 < u < 3,\ 1 < v < 2\}.$$

Il diffeomorfismo inverso è

$$g = \gamma^{-1} = \begin{cases} x = u/(1+v) \\ y = uv/(1+v), \end{cases}$$

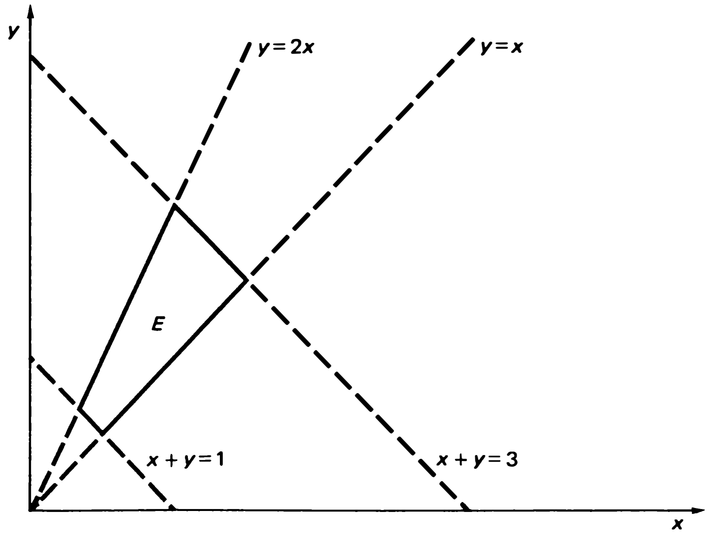

Figura 6.17

e si ha

$$J_g = \begin{pmatrix} 1/(1+v) & -u/(1+v)^2 \\ v/(1+v) & u/(1+v)^2 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\det J_g = u/(1+v)^2 > 0,$$

e dunque

$$\int_E \frac{dx\,dy}{xy} = \int_R \frac{(1+v)^2}{u^2 v} \frac{u}{(1+v)^2}\, du\, dv = \int_1^3 \frac{du}{u} \int_1^2 \frac{dv}{v} = \ln 2 \ln 3. \blacksquare$$

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 7.1. Come al solito, cominceremo col supporre $f(y) \geqslant 0$.

Consideriamo gli aperti

$$\mathscr{A} = \{(\mathbf{x}, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \mathbf{x} \in A, u \in \mathbf{R}\} = A \times \mathbf{R},$$
$$\mathscr{B} = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \mathbf{y} \in B,\ t \in \mathbf{R}\} = B \times \mathbf{R}.$$

L'applicazione

$$G = \mathscr{A} \to \mathscr{B},$$

di componenti

$$\begin{cases} \mathbf{y}=g(\mathbf{x}) \\ t=u, \end{cases}$$

è un diffeomorfismo tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, e si ha

$$J_G(\mathbf{x},u)=\left(\begin{array}{c|c} J_g(\mathbf{x}) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

cosicché

$$\det J_G(\mathbf{x}, u)=\det J_g(\mathbf{x}).$$

Se si pone

$$\mathscr{F}=\{(\mathbf{y},t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R};\mathbf{y}\in E, 0<t<f(\mathbf{y})\},$$

risulta

$$G^{-1}(\mathscr{F})=\{(\mathbf{x},u)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}:\mathbf{x}\in g^{-1}(E), 0<u<f(g(\mathbf{x}))\}.$$

Per il teorema 6.1,

$$\mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F})=\int_{G^{-1}(\mathscr{F})}|\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}u.$$

D'altra parte

$$\mathrm{m}_{n+1}(\mathscr{F})=\int_E f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y},$$

mentre per il teorema di Fubini

$$\int_{G^{-1}(\mathscr{F})}|\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}u=\int_{g^{-1}(E)}|\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}\int_0^{f(g(\mathbf{x}))}\mathrm{d}u=$$

$$=\int_{g^{-1}(E)}f(g(\mathbf{x}))\,|\det J_g(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Il teorema è così dimostrato per funzioni positive; in generale basterà scrivere $f=f^+-f^-$, scrivere la [7.1] per f^+ ed f^-, e infine sottrarre. ∎

Esercizi

7.1 Si calcoli (vedi fig. 6.18)

$$\int_E (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

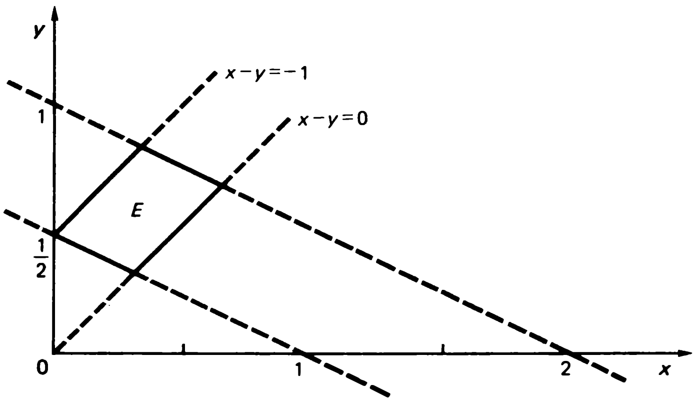

Figura 6.18

7.2 Si confronti la [7.1] con la formula di cambiamento di variabili per gli integrali in **R** (vedi vol. 1, cap. 5, [6.2]).

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

8 Coordinate polari

Un caso speciale di cambiamento di variabili, di particolare interesse nelle applicazioni, è quello che conduce alle coordinate polari. Specialmente nel caso di integrali doppi o tripli, l'introduzione delle coordinate polari può portare a notevoli semplificazioni nei calcoli quando il dominio d'integrazione presenta simmetrie rispetto a rotazioni.

Cominciamo dal caso di due variabili. Un punto P di $\mathbf{R}^2$, di coordinate (x, y), può essere individuato assegnando la distanza di P dall'origine 0

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

e l'angolo θ che il segmento di estremi 0 e P forma con l'asse delle x (vedi fig. 6.19).

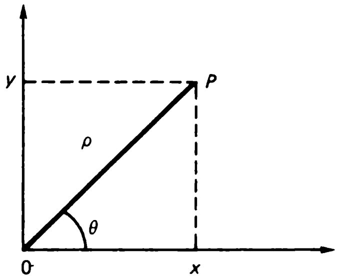

Figura 6.19

Le relazioni tra le coordinate polari ρ, θ e le coordinate cartesiane x, y sono date da

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \, . \end{cases} \qquad [8.1]$$

L'applicazione [8.1] manda la striscia

$$S = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant \rho < +\infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

nel piano $\mathbf{R}^2$. Essa è surgettiva, ma non iniettiva, dato che se $\rho = 0$ si ha $x = y = 0$ per ogni valore di θ. Se però si fanno variare ρ e θ nell'insieme aperto

$$A = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \rho < +\infty, 0 < \theta < 2\pi\},$$

l'applicazione g definita dalla [8.1] è un diffeomorfismo tra A e il piano $\mathbf{R}^2$ privato della semiretta

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0, x \geqslant 0\}.$$

Si ha

$$J_g(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\det J_g = \rho .$$

Se E è un insieme misurabile, contenuto in $\mathbf{R}^2 - \sigma$, si ha per la [7.1]

$$\int_E f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{g^{-1}(E)} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta . \qquad [8.2]$$

D'altra parte, se E è un insieme misurabile qualsiasi, risulterà

$$\int_E f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{E - \sigma} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y ,$$

dato che σ è di misura nulla. Ne segue che la [8.2] è valida per un arbitrario insieme misurabile del piano.

Esempio 8.1
Si calcoli l'integrale

$$\int_E (x+y^2)\,dx\,dy$$

dove E è l'insieme in figura 6.20.

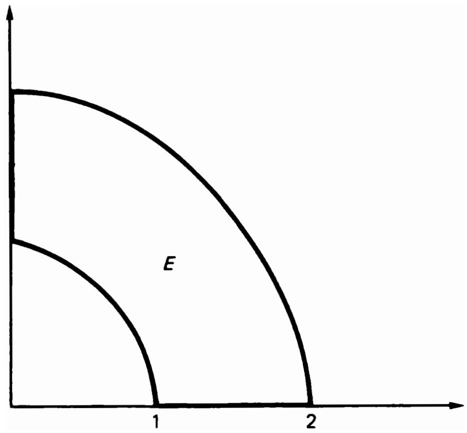

Figura 6.20

Quando il punto P, di coordinate cartesiane (x, y), varia in E, le sue coordinate polari descrivono l'insieme

$$Q=\{(\rho,\theta)\in \mathbf{R}^2 : 1<\rho<2, 0<\theta<\pi/2\}.$$

Si ha allora

$$\int_E (x+y^2)\,dx\,dy=\int_1^2 d\rho\int_0^{\pi/2} \rho^2(\cos\theta+\rho\sin^2\theta)\,d\theta=\frac{7}{3}+\frac{15}{16}\pi. \blacksquare$$

Esempio 8.2
Trovare la misura dell'insieme (vedi fig. 6.21)

$$E=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : y>0, x+y>0, x^2+y^2<3\sqrt{x^2+y^2}-3x\}.$$

Introducendo coordinate polari si ha

$\rho\sin\theta>0,$

$\rho(\sin\theta+\cos\theta)>0,$

$\rho^2<3\rho(1-\cos\theta),$

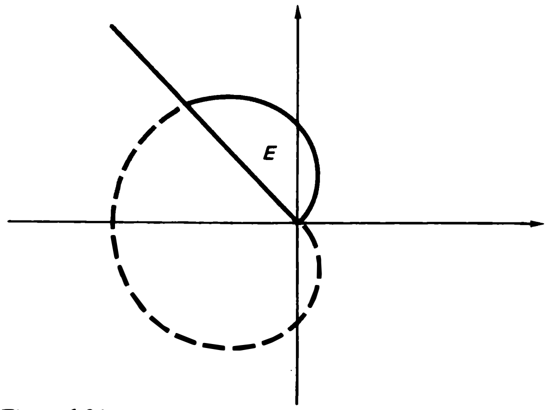

Figura 6.21

e quindi

$$0 < \theta < 3\pi/4$$
$$0 < \rho < 3(1 - \cos\theta),$$

cosicché

$$g^{-1}(E) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 3\pi/4, 0 < \rho < 3(1 - \cos\theta)\}$$

Si ottiene dunque

$$\mathrm{m}(E) = \int_{g^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{3\pi/4} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} \rho \, d\rho = \frac{9}{2} \int_0^{3\pi/4} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta =$$
$$= \frac{9}{8} \left(\frac{9}{2} \pi - 4\sqrt{2} - 1 \right). \blacksquare$$

Veniamo ora alle coordinate polari in tre dimensioni, dette anche *coordinate sferiche* (vedi fig. 6.22).

Se P è un punto di $\mathbb{R}^3$, di coordinate cartesiane (x, y, z), si indica con ρ la distanza tra P e O:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

con θ l'angolo che il segmento OP forma con l'asse z, e con φ l'angolo tra l'asse x e il segmento OQ, proiezione di OP sul piano xy.

Si ha

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

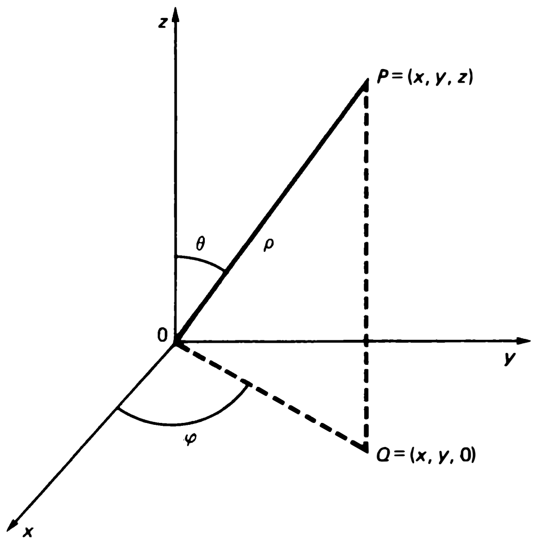

Figura 6.22

e l'applicazione $g:(\rho,\theta,\varphi)\to(x,y,z)$ è un diffeomorfismo tra l'aperto

$$A=\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbf{R}^3:0<\rho<+\infty,0<\theta<\pi,0<\varphi<2\pi\}$$

e $\mathbf{R}^3$ privato del semipiano

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:y=0,x\geqslant 0\}.$$

La matrice jacobiana dell'applicazione g è

$$J_g=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

e dunque

$$\det J_g=\rho^2\sin\theta>0.$$

Si ha allora, dato che Σ ha misura nulla,

$$\int_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\int_{g^{-1}(E)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \qquad [8.3]$$

Esempio 8.3
Si trovi il volume dell'intersezione tra il cono

$$x^2 + y^2 < z^2$$

e la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 < 2az.$$

Introducendo coordinate polari si ha

$$\rho^2 \sin^2 \theta < \rho^2 \cos^2 \theta$$
$$\rho^2 < 2a\rho \cos \theta,$$

e quindi

$$g^{-1}(E) = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi/4, 0 < \rho < 2a \cos \theta\}.$$

Per la [8.3]

$$\mathrm{m}(E) = \int_{g^{-1}(E)} \rho^2 \sin \theta \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \theta \sin \theta \, \mathrm{d}\theta = \pi a^3. \blacksquare$$

Esempio 8.4
Trovare il momento d'inerzia di un cono C di altezza h e raggio della base a, rispetto a una retta passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono.

Scegliamo l'origine come vertice, l'asse z come asse del cono, e l'asse delle x come asse rispetto al quale si deve calcolare il momento d'inerzia. Si ha

$$I = \int_C (y^2 + z^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Se si indica con α l'apertura del cono

$$\alpha = \mathrm{arctg}(a/h)$$

si ha, passando a coordinate polari,

$$g^{-1}(C) = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \alpha, 0 < \rho < h/\cos \theta\},$$

e quindi

$$I = \int_{g^{-1}(C)} \rho^4 \sin \theta (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi =$$

$$=\int_0^{\alpha}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{h/\cos\theta}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta\,\sin^2\varphi+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\pi\int_0^{\alpha}\sin\theta(1+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{h/\cos\theta}\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi h^5}{5}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\theta(1+\cos^2\theta)}{\cos^5\theta}\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{\pi h^5}{5}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\right].$$

Ricordando che $\operatorname{tg}\alpha=a/h$, e quindi $\cos^2\alpha=h^2/(h^2+a^2)$, si ottiene, in conclusione,

$$I=\frac{\pi h a^2}{20}(4h^2+a^2).\ \blacksquare$$

Per finire questo paragrafo, sarà il caso di menzionare le coordinate cilindriche in $\mathbf{R}^3$, legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z, \end{cases}$$

In sostanza le coordinate cilindriche si limitano a operare un cambiamento di variabili nel piano xy, nel quale vengono introdotte coordinate polari, lasciando inalterata la terza coordinata. Per questa trasformazione la matrice jacobiana è

$$J_g=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

cosicché

$$\det J_g=r,$$

e quindi

$$\int_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{g^{-1}(E)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.\ \blacksquare \qquad [8.4]$$

Esempio 8.5
Si calcoli

$$\int_E\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

dove E è l'insieme

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x>0,\ z^2<x^2+y^2<ax\}.$$

Passando a coordinate cilindriche si ottiene

$$g^{-1}(E)=\{(r,\theta,z)\in\mathbf{R}^3:-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},0<r<a\cos\theta,-r<z<r\},$$

e dunque

$$\int_E\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\int_{-r}^{r}\mathrm{d}z=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a^4}{16}.\ \blacksquare$$

Esempio 8.6

Sia A un insieme misurabile del piano xz, contenuto nel semipiano $x\geqslant 0$, e sia E l'insieme di $\mathbf{R}^3$ ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse z (vedi esempio 5.2).

Per calcolare il volume di E si possono usare coordinate cilindriche; si ha

$$g^{-1}(E)=\{(r,\theta,z):0\leqslant\theta<2\pi,(r,z)\in A\}$$

e dunque

$$\mathrm{m}(E)=2\pi\int_A r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

Se poi, invece di far ruotare A di 2π, si esegue solo una rotazione di un angolo θ_0, indicando ancora con E il solido così ottenuto, si ottiene

$$\mathrm{m}(E)=\theta_0\int_A r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.\ \blacksquare \qquad [8.5]$$

Ricordando la definizione di baricentro di una figura (vedi esercizio 5.3) si ottiene il seguente teorema (di Pappo-Guldino):

Il volume di un solido di rotazione è uguale al prodotto dell'area della figura ruotante per il cammino percorso dal suo baricentro.

Infatti sia $\bar{x}$ la prima coordinata del baricentro di A

$$\bar{x}=\frac{1}{\mathrm{m}(A)}\int_A x\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Il cammino percorso dal baricentro di A nella rotazione di un angolo θ_0 sarà $\theta_0\bar{x}$, che moltiplicato per $\mathrm{m}(A)$ dà

$$\theta_0\int_A x\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

cioè la misura di E. $\blacksquare$

Esercizi

8.1 Trovare l'area delle seguenti regioni del piano:

$$E = \{(x, y) : 9 < x^2 + y^2 < 8y\}$$
$$F = \{(x, y) : 0 < y < 8, y^2/4 < x < 2y\}$$
$$G = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^3 < 16x^2\}.$$

8.2 Trovare il volume delle seguenti regioni dello spazio $\mathbf{R}^3$:

$$E_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 4, x^2 + y^2 + z^2 < 16\}$$
$$E_2 = \{(x, y, z) : z^2 > x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$$
$$E_3 = \{(x, y, z) : 0 < 2z < x^2 + y^2 < 2y\}$$
$$E_4 = \{(x, y, z) : z > 0, x^2 + y^2 < z^2, x - 2z + 2 > 0\}$$
$$E_5 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 2az, x^2 + y^2 < az\}$$
$$E_6 = \{(x, y, z) : z > 0, x^2 + y^2 < z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 2ax\}.$$

8.3 Trovare l'area dell'asteroide

$$A = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} < a^{2/3}\}$$

(si operi il cambiamento di variabili

$$x = r \cos^3 \varphi$$
$$y = r \sin^3 \varphi).$$

8.4 Si calcoli l'area del dominio

$$A_h = \{(x, y) : x^{2/(2h-1)} + y^{2/(2h-1)} < a^{2/(2h-1)}\}.$$

Che cosa succede quando $h \to +\infty$?

8.5 Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy, \qquad \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)^{-1/2}\, dy,$$

$$\int_0^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2)^{3/2}\, dx.$$

8.6 Calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Usare il risultato precedente per dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

8.7 Calcolare gli integrali delle funzioni che seguono, negli insiemi indicati a fianco:

$\int_E xyz\,dx\,dy\,dz$, $E=\{$il tetraedro limitato dai piani coordinati e dal piano di equazione $x+y+z=1\}$

$\int_E z^2\,dx\,dy\,dz$, $E=\{(x,y,z): x^2+y^2>a^2, x^2+y^2+z^2<4a^2\}$

$\int_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ $E=\{(x,y,z): x^2+y^2<2z<4x\}$

$\int_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ $E=\{(x,y,z): z^2<x^2+y^2, (x^2+y^2)^2<a^2(x^2-y^2)\}$.

8.8 Calcolare il volume del solido generato ruotando la figura dell'esercizio 7.1 attorno all'asse y (e attorno all'asse x).

9 Derivazione sotto il segno di integrale

Sia E un insieme misurabile di $\mathbf{R}^n$, A un aperto di $\mathbf{R}^k$, e sia

$$E\times A=\{(\mathbf{x},\mathbf{t}): \mathbf{x}\in E, \mathbf{t}\in A\}$$

il loro prodotto cartesiano.

Se $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ è una funzione definita in $E\times A$, e integrabile in $\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{t}\in A$, poniamo

$$F(\mathbf{t})=\int_E f(\mathbf{x},\mathbf{t})\,d\mathbf{x}. \qquad [9.1]$$

In questo paragrafo studieremo il problema della continuità e della differenziabilità della funzione $F(\mathbf{t})$. In particolare ci interesserà stabilire la validità di formule che permettono di derivare sotto il segno di integrale (vedi teorema 9.1).

Cominciamo con lo stabilire un semplice risultato.

Lemma 9.1 *Sia* $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ *una funzione integrabile in* $\mathbf{x}$ *per ogni* $\mathbf{t}$ *in* A *e continua in* $\mathbf{t}$ *per quasi ogni* $\mathbf{x}$ *in* E. *Supponiamo che esista una funzione* $g(\mathbf{x})$ *sommabile in* E *e tale che*

$$|f(\mathbf{x},\mathbf{t})|\leqslant g(\mathbf{x}) \qquad [9.2]$$

per ogni $\mathbf{t}\in A$ *e per quasi tutti gli* $\mathbf{x}\in E$. *Allora la funzione* $F(\mathbf{t})$ *è continua in* A.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{t}_0$ un punto di A, e sia $\{\mathbf{t}_h\}$ una successione a valori in A, convergente a $\mathbf{t}_0$. Poiché $f(\mathbf{x},\mathbf{t})$ è continua in $\mathbf{t}$ per quasi ogni $\mathbf{x}\in E$, risulterà

$$\lim_{h\to\infty} f(\mathbf{x},\mathbf{t}_h)=f(\mathbf{x},\mathbf{t}_0) \qquad \text{q.o. in } E.$$

Per la [9.2] risulterà inoltre $|f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_h)| \leq g(\mathbf{x})$ e quindi si può applicare il teorema 4.3 (di Lebesgue):

$$\lim_{h\to\infty} \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_h)\, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t}_0)\, d\mathbf{x}.$$

Ricordando la definizione di $F(\mathbf{t})$, quest'ultima relazione si scrive

$$\lim_{h\to\infty} F(\mathbf{t}_h) = F(\mathbf{t}_0), \qquad [9.3]$$

e poiché la [9.3] vale per ogni successione $\mathbf{t}_h \to \mathbf{t}_0$, si può concludere che

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{t}_0} F(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t}_0)$$

e dunque la continuità della funzione $F(\mathbf{t})$. ∎

Osservazione 9.1. Se vien meno l'ipotesi [9.2], il teorema cessa di valere in generale. Ad esempio, se si prende $A = E = \mathbf{R}$, e

$$f(x, t) = \begin{cases} \dfrac{|t| - |x|}{t^2} & \text{se } |x| < |t| \\ 0 & \text{se } |x| \geq |t|, \end{cases}$$

risulta $F(t) = 1$ per $t \neq 0$, e $F(0) = 0$, e dunque F non è continua in 0. ∎

Veniamo ora alle proprietà di differenziabilità della funzione F.

Teorema 9.1 *Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ una funzione sommabile in E per ogni $\mathbf{t} \in A$, e di classe $C^1(A)$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$. Supponiamo che esistano k funzioni sommabili in E, $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_k(\mathbf{x})$, tali che, per ogni $\mathbf{t} \in A$ e per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$, risulti*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right| \leq g_j(\mathbf{x}), \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \qquad [9.4]$$

In tal caso $F(t)$ è di classe C^1 in A, e risulta

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\, d\mathbf{x}. \qquad [9.5]$$

Ricordando la definizione della funzione F, la [9.5] si può mettere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{t})\, d\mathbf{x} = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\, d\mathbf{x},$$

che prende il nome di *formula di derivazione sotto il segno di integrale*.

Dimostrazione. Cominciamo col supporre che A sia un aperto di $\mathbf{R}$, cosicché F risulta funzione di una sola variabile reale.

Fissato $t_0 \in A$, sia $r>0$ tale che $I(t_0, r) \subset A$, e sia $\{t_k\}$ una successione a valori in $I(t_0, r)$ e convergente a t_0. Risulta

$$\frac{F(t_h)-F(t_0)}{t_h-t_0}=\int_E \frac{f(\mathbf{x}, t_h)-f(\mathbf{x}, t_0)}{t_h-t_0}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Poniamo

$$\psi_h(\mathbf{x})=\frac{f(\mathbf{x}, t_h)-f(\mathbf{x}, t_0)}{t_h-t_0};$$

per il teorema del valor medio, per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$ esisterà un punto $\xi \in I(t_0, r)$ tale che

$$\psi_h(\mathbf{x})=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \xi)$$

e dunque per la [9.4]:

$$|\psi_h(\mathbf{x})| \leqslant g_1(\mathbf{x}), \quad \text{q. o. in } E.$$

D'altra parte per quasi ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione ψ_h converge a $\partial f(\mathbf{x}, t_0)/\partial t$; per il teorema di Lebesgue:

$$\lim_{h \to \infty} \frac{F(t_h)-F(t_0)}{t_h-t_0}=\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad [9.6]$$

Poiché la [9.6] vale per ogni successione $t_h \to t_0$, la funzione F risulta derivabile in t_0, e dunque il teorema è dimostrato nel caso $k=1$.

Per dimostrare il teorema 9.1 nel caso generale, si fissino le variabili $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k$ e si faccia variare la sola t_j. Per quanto detto sopra si avrà

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t)=\int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad j=1, 2, \ldots, k.$$

Applicando il lemma 9.1 alla funzione $\partial f/\partial t_j$, si trova che $\partial F/\partial t_j$ è continua, quindi che F è di classe C^1 in A. ■

Un caso interessante si ha quando E è un intervallo della retta reale: $E=[a, b]$. Supponiamo che $f(x, \mathbf{t})$ e $\partial f/\partial t_j$ siano funzioni continue in $[a, b] \times A$.

La funzione

$$F(\mathbf{t}, u, w)=\int_u^w f(x, \mathbf{t})\,\mathrm{d}x$$

è definita in $A \times [a,b] \times [a,b]$, è di classe C^1 e risulta

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t},u,w)=\int_u^w \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,\mathbf{t})\,\mathrm{d}x \qquad [9.7]$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{t},u,w)=-f(u,\mathbf{t}), \qquad \frac{\partial F}{\partial w}(\mathbf{t},u,w)=f(w,\mathbf{t}).$$

Se ora $\alpha(\mathbf{t})$ e $\beta(\mathbf{t})$ sono funzioni di classe $C^1(A)$, a valori in $[a,b]$, si può porre

$$G(\mathbf{t})=\int_{\alpha(\mathbf{t})}^{\beta(\mathbf{t})} f(x,\mathbf{t})\,\mathrm{d}x=F(t,\alpha(\mathbf{t}),\beta(\mathbf{t})).$$

Dalla formula di derivazione delle funzioni composte e dalla [9.7] segue allora

$$\frac{\partial G}{\partial t_j}(\mathbf{t})=f(\beta(\mathbf{t}),\mathbf{t})\frac{\partial \beta}{\partial t_j}(\mathbf{t})-f(\alpha(\mathbf{t}),\mathbf{t})\frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(\mathbf{t})+\int_{\alpha(\mathbf{t})}^{\beta(\mathbf{t})}\frac{\partial f}{\partial t_j}(x,\mathbf{t})\,\mathrm{d}x. \qquad [9.8]$$

In particolare, se $A \subset \mathbf{R}$ la funzione $G(t)$ dipende da una sola variabile reale, e risulta

$$G'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x. \qquad [9.9]$$

Esempio 9.1

Si calcoli l'integrale

$$F(t)=\int_0^\infty \exp(-x^2-t^2/x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Si ha $F(-t)=F(t)$ e $F(0)=\sqrt{\pi}/2$ (vedi esercizio 8.6). Sarà dunque sufficiente considerare il caso $t>0$.

Si fissi $r>0$ e sia $A=(r,+\infty)$, $E=(0,+\infty)$. La funzione

$$f(x,t)=\exp(-x^2-t^2/x^2)$$

è continua in $E\times A$ e inoltre, ricordando che per $y>0$ risulta $ye^{-y}\leqslant\frac{1}{e}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|=\frac{2e^{-x^2}}{t}\,\frac{t^2}{x^2}e^{-t^2/x^2}\leqslant\frac{2e^{-x^2}}{re}.$$

Si può dunque applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Risulta

$$F'(t)=-\int_0^\infty \frac{2t}{x^2}\exp(-x^2-t^2/x^2)\,\mathrm{d}x$$

per ogni $t>r$; per l'arbitrarietà di r questa formula vale per ogni $t>0$. Eseguendo il cambiamento di variabile $y=t/x$, si trova

$$F'(t)=-2\int_0^\infty \exp(-t^2/y^2-y^2)\,dy=-2F(t),$$

e quindi, per $t>0$,

$$F(t)=F(0)e^{-2t}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$$

In definitiva, tenendo conto del fatto che $F(t)=F(-t)$, si trova

$$\int_0^\infty \exp(-x^2-t^2/x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|t|}. \blacksquare$$

Esercizi

9.1 Trovare $F'(t)$ se

$$F(t)=\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx, \qquad F(t)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}e^{tx}\,dx.$$

9.2 Sia

$$F(t)=\int_0^1 \ln(2-x^2t^2)\,dx$$

Si dimostri che $F'(0)=0$ e che $F(t)$ è concava nell'intervallo $(-1, 1)$.

9.3 Sia

$$g(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx\,dt.$$

Dimostrare che $g'(x)=-x\,g(x)/2$ e quindi trovare $g(x)$.

9.4 Sia

$$F(t)=\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx.$$

Si calcolino $F'(t)$ e $F''(t)$, e a partire da quest'ultima si ricavi una formula esplicita per $F(t)$ (si tenga conto del fatto che $\lim_{t\to+\infty} F(t)=\lim_{t\to+\infty} F'(t)=0$). Si dimostri che

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-2x}\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

Notizie storiche

(A) *La teoria dell'integrazione da Riemann a Lebesgue*[4]

Abbiamo visto come la prima definizione moderna di integrale sia stata data esplicitamente da Cauchy, nel suo *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique*. Cauchy si limita al caso di funzioni continue, o con un numero finito di punti di discontinuità. Quando una funzione f ha un punto di discontinuità c, nelle vicinanze del quale può o meno essere limitata, egli introduce la nozione di integrale improprio o generalizzato (vedi vol. 1, cap. 6, § 8), nozione che si estende al caso di un numero finito di punti di discontinuità.

Sempre nel *Résumé*, Cauchy prova l'integrabilità delle funzioni continue, un risultato che Dirichlet, nella sua celebre memoria del 1829 sulle serie di Fourier, dice facile da dimostrare. Non è chiaro qui se Dirichlet alluda alla dimostrazione di Cauchy, oppure se ha già in mente la dimostrazione che poi esporrà nelle sue lezioni del 1854 all'Università di Berlino (pubblicate però solo nel 1904). A noi comunque interessa più l'ultima parte del lavoro, in cui Dirichlet si pone il problema dell'integrabilità delle funzioni con infiniti punti di discontinuità:

Quando le soluzioni di continuità sono in numero infinito – egli dice – è necessario che la funzione $\varphi(x)$ sia tale che, se si indicano con a e b due quantità comprese tra [gli estremi di integrazione] $-\pi$ e π, sia sempre possibile inserire tra a e b due altre quantità r e s in modo che la funzione sia continua nell'intervallo da r a s.

In altre parole, Dirichlet sembra affermare che condizione necessaria per l'integrabilità di una funzione φ sia che l'insieme dei suoi punti di discontinuità sia "rado" (*nowhere dense*) cioè che la sua chiusura non abbia punti interni. Per corroborare la sua affermazione egli introduce la celebre *funzione di Dirichlet*:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x \text{ è razionale}\\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale,}\end{cases}$$

dicendo che una tale funzione non può essere integrabile.

La condizione sopra descritta non è né necessaria né sufficiente; comunque l'interesse della memoria di Dirichlet sta nell'aver legato esplicitamente l'integrabilità di una funzione all'insieme dei punti di discontinuità, dando così inizio a uno studio che si protrarrà fino all'apparire della teoria di Lebesgue.

Nello stesso lavoro Dirichlet promette di tornare sulla questione dell'integrazione delle funzioni discontinue, senza peraltro dare seguito al proposito.

Possiamo però farci un'idea delle sue ricerche da quanto pubblicato da Rudolph Lipschitz (1832-1903) nel 1864. Questi considera il caso in cui il derivato $\mathscr{D}D$ dell'insieme D dei punti di discontinuità è finito, ad esempio è costituito dal solo primo estremo a. In $(a+\epsilon, b)$ cade allora un numero finito di punti di discontinuità, e si può usare la definizione di Cauchy. L'integrale tra a e b sarà così il limite per $\epsilon \to 0$ dell'integrale tra $a+\epsilon$ e b.

[4] Gran parte del materiale per questo paragrafo mi è stato fornito da G. Letta.

Siamo dunque davanti a una sorta di integrale improprio ripetuto; è evidente come si possa generalizzare questo risultato al caso in cui il derivato n-esimo di D sia finito (e dunque l'$(n + 1)$-esimo sia vuoto).

Nel seguito chiameremo *insieme di prima specie* un insieme con derivato n-esimo vuoto, per qualche intero n. E' chiaro che un insieme di prima specie è rado; in realtà Lipschitz pensa che sia vero il viceversa, e addirittura afferma che un insieme rado ha derivato finito, credendo così di aver dimostrato la sufficienza della condizione di Dirichlet. Questo errore non deve stupire poiché i concetti topologici erano all'epoca in una fase estremamente primitiva. Possiamo anzi dire che la storia dell'integrazione, tra la memoria di Riemann e quella di Lebesgue, è in gran parte la storia della precisazione graduale, non priva di errori e circoli viziosi, dei concetti topologici di *insieme rado* e *insieme di prima specie* e delle loro relazioni con gli insiemi di misura nulla.

La memoria di Riemann, presentata come tesi di abilitazione alla libera docenza all'Università di Gottinga nel 1854, resta praticamente sconosciuta fino al 1867, quando viene pubblicata a cura di Dedekind. In essa, dopo aver introdotto l'integrale che porta il suo nome, Riemann si pone il problema di caratterizzare la classe delle funzioni integrabili.

Il risultato finale è il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata $f(x)$ sia integrabile è che per ogni σ, $\delta > 0$ esista una suddivisione dell'intervallo (a, b) in un numero finito di intervalli tale che la somma delle lunghezze di quelli nei quali l'oscillazione della funzione supera σ risulti minore di δ.[5]

[5] Per comodità del lettore riportiamo la dimostrazione della sufficienza della condizione. Dati σ e δ, sia D la suddivisione in questione, e indichiamo con $J_h (h = 1, 2, ..., n)$ quegli intervalli in cui l'oscillazione della funzione supera σ (che hanno misura totale minore di δ) e con $I_k (k = 1, 2, ..., N)$ gli altri.

Sia al solito

$$M_k = \sup_{I_k} f(x), \qquad m_k = \inf_{I_k} f(x)$$

e sia

$$L = \sup_{(a,b)} f, \qquad l = \inf_{(a,b)} f.$$

Le funzioni

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} M_k \varphi_{I_k} + L \sum_{h=1}^{n} \varphi_{J_h},$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} m_k \varphi_{I_k} + l \sum_{h=1}^{n} \varphi_{J_h}$$

sono rispettivamente una maggiorante e una minorante di f, e si ha

$$\int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)\, m(I_k) + (L - l) \sum_{h=1}^{n} m(J_h) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma \sum_{k=1}^{N} m(I_k) + (L - l)\delta \leqslant \sigma(b - a) + (L - l)\delta.$$

Per l'arbitrarietà di σ e δ la funzione f sarà dunque integrabile (vol. 1, cap. 4, teorema 4.2).

Riemann mostra la generalità di tale condizione costruendo una funzione che la soddisfa, e per la quale i punti di discontinuità formano un insieme denso (non verificante dunque la condizione ritenuta necessaria da Dirichlet).

Non riporteremo qui l'esempio di Riemann, limitandoci a osservare come lo stesso comportamento sia esibito dalla funzione

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x \text{ irrazionale} \\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n}\,, m \text{ e } n \text{ primi tra loro,} \end{cases}$$

che è integrabile in [0, 1] e discontinua in ogni punto razionale (vedi vol. 1, cap. 4, esercizio 5.2).

La pubblicazione della memoria di Riemann diede origine a una notevole serie di ricerche, soprattutto in Germania e in Italia, volte a estendere e chiarificare le idee contenute in essa, e in principal modo a legare l'integrabilità delle funzioni all'insieme dei loro punti di discontinuità.

Tali ricerche, oltre a consentire la chiarificazione delle proprietà topologiche degli insiemi della retta e delle loro mutue relazioni, condurranno Cantor a fondare la teoria degli insiemi, e sfoceranno nella costruzione di una teoria della misura e infine nell'integrale di Lebesgue. Gli anni 1870-90 vedono la pubblicazione di un considerevole numero di lavori, la maggior parte nella direzione indicata. Il primo di questi è dovuto ad Hermann Hankel (1839-1873), che in un lavoro del 1870, introdotto il salto della funzione f nel punto x,[6]

$$s_f(x)=\max \lim_{y\to x} |f(y)-f(x)|,$$

dimostra, o meglio crede di dimostrare, che "condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata $f(x)$ sia integrabile secondo Riemann è che per ogni $\sigma>0$ l'insieme degli x in cui $s_f(x)>\sigma$ sia rado".

Il risultato non è esatto, e la condizione di Hankel è necessaria ma non sufficiente; d'altra parte, il lavoro ha il merito di avere svincolato la condizione d'integrabilità dalla considerazione dell'oscillazione su intervalli, e aver introdotto, anche se non esplicitamente, il salto s_f.

L'errore della dimostrazione di sufficienza di Hankel consiste essenzialmente nel ritenere che un insieme rado sia trascurabile, cioè racchiudibile in un numero finito di intervalli di lunghezza totale arbitrariamente piccola. Quest'ultima nozione era già suggerita dalla condizione di Riemann, nella quale però, per così dire, mancava il soggetto (cioè l'insieme che doveva essere trascurabile) in quanto essa era espressa in termini dell'oscillazione di f su intervalli.

Un passo decisivo in questa direzione è compiuto da Ascoli, che nel 1875 introduce l'oscillazione della f in un punto (vedi esempio 4.2)

$$\omega_f(x)=f^*(x)-f_*(x)$$

e dimostra il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata f sia integrabile è che per ogni $\sigma>0$ l'insieme degli x in cui $\omega_f(x)>\sigma$ sia trascurabile,

facendo vedere l'equivalenza di questa condizione a quella di Riemann.

[6] Più che introdurre esplicitamente il salto, Hankel si limita a definire la nozione di *salto maggiore di σ*.

La questione della relazione tra insiemi radi e trascurabili è risolta nello stesso anno da Henry J. S. Smith (1826-1883), che costruisce un esempio di insieme rado non trascurabile.

Né la memoria di Ascoli né quella di Smith ebbero la diffusione che avrebbero meritato. La prima rimase praticamente sconosciuta, e tale resta anche oggi ad alcuni storici della teoria dell'integrazione, i quali, forse appoggiandosi su un'analoga affermazione di Lebesgue, attribuiscono il risultato di Ascoli a Du Bois-Raymond, che lo ritrova nel 1882. La seconda venne anch'essa ignorata per lungo tempo, e non contribuì, come avrebbe potuto, a far chiarezza sulle relazioni tra insiemi di prima specie, radi e trascurabili.

In questo campo continua a dominare una certa confusione: Ascoli, come abbiamo visto, sostituisce un suo criterio a quello di Hankel (data la sostanziale equivalenza tra il salto s_f e l'oscillazione ω_f, la condizione di Ascoli si può ottenere da quella di Hankel semplicemente sostituendo "rado" con "trascurabile") senza pronunciarsi sulla validità di questo, cioè in ultima analisi sull'equivalenza tra i due concetti.

Du Bois-Raymond nel 1875 e poi più esplicitamente A. Harnack (1851-1888) nel 1880 sembrano confondere addirittura i tre concetti; se il primo nel 1882 si corregge e dà addirittura un esempio di insieme rado non trascurabile (nello stesso libro compare la definizione esplicita di insieme trascurabile, o *integrirbare Punktmenge*), Harnack nel 1881 riconosce la differenza tra insiemi di prima specie e insiemi trascurabili (*diskrete Menge*) e cita l'insieme di Cantor (vedi cap. 5, esempio 3.3) come esempio di un insieme non di prima specie e trascurabile, ma persiste nel confondere questi ultimi con gli insiemi radi, errore che correggerà l'anno successivo fornendo anch'egli un esempio.

Un esempio di insieme rado non trascurabile era peraltro apparso nel 1881, ad opera di Volterra, che ovviamente come gli altri ignorava l'articolo di Smith.

Esente da queste confusioni è invece l'opera di Ulisse Dini (1845-1918) del 1878, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, la prima esposizione sistematica delle ricerche originate dal lavoro di Riemann. Innanzitutto Dini ha ben presente la distinzione tra insiemi di prima specie e insiemi trascurabili; egli prova che ogni insieme di prima specie è rado e trascurabile, e anche se non arriva a dimostrare la non coincidenza di queste due nozioni si premura di tenerle sempre distinte. In particolare fa rilevare l'inconsistenza della dimostrazione di Hankel.

D'altra parte, egli non riconosce probabilmente l'importanza del concetto di insieme trascurabile; tali insiemi non hanno una definizione esplicita (né l'hanno in Volterra, che del Dini era allievo alla Scuola Normale di Pisa) e dunque necessariamente non occupano il posto che ci si aspetterebbe di trovare.

E' probabilmente proprio a causa di questa mancata intuizione che Dini enuncia la maggior parte dei suoi risultati per insiemi di prima specie, salvo poi usare questa ipotesi unicamente per dedurre che l'insieme in questione è trascurabile.

Gli anni intorno al 1885 segnano comunque l'abbondono definitivo delle nozioni topologiche (insiemi di prima specie, insiemi radi); d'altra parte la condizione di Vitali, che si afferma però solo in seguito alla riscoperta da parte di Du Bois-Raymond, suggerisce quasi naturalmente l'idea di una "misura", rispetto alla quale gli insiemi trascurabili appaiano come insiemi di misura nulla.

Nel 1884 Otto Stolz (1842-1905) e l'anno dopo Harnack definiscono il contenuto (*Inhalt*) di un insieme A nel modo seguente: incluso A nell'unione di un numero finito di intervalli si prende la somma delle lunghezze di questi; l'estremo inferiore di tali numeri è appunto il contenuto dell'insieme.

Più o meno nello stesso periodo, Cantor considera per un insieme E di $\mathbf{R}^n$ l'involucro esterno di E, di raggio ρ:

$$E_\rho = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{dist}(x, E) < \rho\},$$

e definisce il contenuto di E come l'estremo inferiore del volume di E_ρ. Che cosa sia poi questo volume Cantor non lo dice, limitandosi ad affermare che può essere calcolato con un integrale multiplo.

Ambedue queste definizioni hanno l'importante difetto di non essere additive: il contenuto dell'unione di due insiemi disgiunti può essere strettamente minore della somma dei contenuti. Ad esempio l'insieme dei punti razionali e quello degli irrazionali dell'intervallo $[0, 1]$ hanno ambedue contenuto 1.

Per ovviare a questo inconveniente Giuseppe Peano (1858-1932) definisce nel 1887 una "lunghezza" per gli insiemi della retta, poi generalizzata da Camille Jordan (1838-1922) nel 1893 a insiemi di $\mathbf{R}^n$. Questa misura, nota sotto il nome di *misura di Peano-Jordan*, è definita tramite i plurintervalli: si definisce *misura interna* di un insieme E l'estremo superiore delle misure dei plurintervalli contenuti in E, e *misura esterna* l'estremo inferiore delle misure di quelli che contengono E. Un insieme si dirà poi *misurabile* (secondo Peano-Jordan) se coincidono le misure interna ed esterna: come si vede, una misura più rozza di quella di Lebesgue (vedi cap. 5, osservazione 2.3) ma un notevole miglioramento rispetto alle concezioni primitive di Stolz, Harnack e Cantor. In particolare la misura di Peano-Jordan è additiva (gli insiemi "patologici" non risultano misurabili), ma non numerabilmente additiva.

La questione dell'additività numerabile era già apparsa in precedenza: nel suo lavoro del 1885 Harnack si era chiesto se la somma delle misure di un'infinità numerabile di intervalli a due a due disgiunti, la cui unione è l'intervallo (a, b), fosse uguale a $b-a$. La risposta, come si deduce dal teorema 3.1, è affermativa, ma Harnack aveva creduto di potere rispondere negativamente, e probabilmente per questo aveva definito il contenuto di un insieme tramite sistemi finiti di intervalli.

Il problema viene ripreso da un punto di vista nettamente differente da Emile Borel (1871-1956) nel 1898. Egli dimostra il risultato che Harnack aveva ritenuto falso, e se ne serve come punto di partenza per una definizione "assiomatica" della misura, enucleando alcune proprietà che gli sembrano essenziali. Queste sono:

(a) la misura di un intervallo (aperto o chiuso) è la differenza degli estremi;

(b) la misura della differenza di due insiemi misurabili A e B, $A \supset B$, è la differenza delle misure;

(c) la misura dell'unione di un'infinità numerabile di insiemi misurabili e disgiunti è la somma delle misure.

Nella sua memoria, Borel indica molto brevemente come costruire una classe di insiemi misurabili, chiamati poi *insiemi boreliani*; questi sono la minima classe che contenga gli intervalli e che sia stabile per differenza e unione misurabile (tale cioè che la differenza di due insiemi della classe, e l'unione di un'infinità numerabile di insiemi di essa sia ancora un insieme della classe).

La teoria di Borel rappresenta un enorme passo avanti rispetto alle idee di Peano e Jordan, soprattutto a causa dell'additività numerabile che si rivelerà una delle proprietà più feconde. D'altra parte, essa appariva nel lavoro di Borel soprattutto come un mezzo tecnico in vista dello studio di altre questioni, ed era dunque trattata in modo incompleto e quasi marginale. Spetterà a Henri Lebesgue (1875-1941) il merito di aver compreso l'importanza delle nuove idee e di averle rielaborate ponendole alla base della sua trattazione dell'integrale.

(B) *L'integrale di Lebesgue*

Le idee di Lebesgue sono già elaborate nella sua tesi: *Intégrale, longueur, aire* del 1902 e poi in forma definitiva nelle *Leçons sur l'integration et la recherche des functions primitives* del 1904. Per quello che riguarda la misura, egli mette insieme le nuove idee di Borel con quelle di Peano, definendo dapprima la misura esterna di un insieme E come l'estremo inferiore delle misure degli aperti che contengono E (vedi cap. 5, definizione 2.3); quindi, nel caso in cui E sia limitato, e dunque contenuto in un intervallo Q, la sua misura interna come la differenza tra la misura di Q e quella esterna di $Q-E$, definizione equivalente a quella da noi introdotta per mezzo dei compatti (vedi cap. 5, osservazione 2.2).

Chiamato misurabile un insieme la cui misura interna coincide con l'esterna, Lebesgue dimostra che la differenza di due insiemi misurabili è misurabile, e che tale è anche l'unione di un'infinità numerabile di insiemi misurabili, ritrovando così le condizioni (b) e (c) di Borel.

Il contributo più importante di Lebesgue è tuttavia l'applicazione di queste idee alla teoria dell'integrazione. Egli non si pone più il problema di caratterizzare le discontinuità delle funzioni integrabili secondo Riemann, ma estende decisamente la classe delle funzioni integrabili dando dell'integrale una nuova e più efficiente definizione.

La differenza tra i due modi (di Riemann e di Lebesgue) di vedere l'integrazione è descritta dallo stesso Lebesgue nel suo articolo divùlgativo *Sur le development de la notion d'intégrale* del 1926.

Seguendo Riemann, per definire l'integrale di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ si divide $[a, b]$ in un numero finito di intervalli I_k $(k=1, ..., N)$ e si costruiscono le somme

$$\overline{S}=\sum_{k=1}^{N} M_k \,\mathrm{m}(I_k) \quad \text{e} \quad \underline{S}=\sum_{k=1}^{N} m_k \,\mathrm{m}(I_k),$$

dove M_k e m_k denotano rispettivamente l'estremo superiore e inferiore della f in I_k.

Una funzione sarà integrabile secondo Riemann se si può rendere arbitrariamente piccola la differenza $\overline{S}-\underline{S}$ raffinando opportunamente la suddivisione, cioè prendendo un numero sempre più elevato di intervalli sempre più piccoli.

Poiché si ha

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{N} (M_k-m_k)\,\mathrm{m}(I_k),$$

è chiaro che il prendere intervalli di misura sempre più piccola renderà sempre più piccole le differenze M_k-m_k (e dunque $\overline{S}-\underline{S}$) *se la funzione f è continua*, o anche se ha poche discontinuità. Quando però la funzione in esame è discontinua dappertutto, non c'è nessuna ragione perché il divenire gli intervalli I_k sempre più piccoli debba rendere sempre più piccole le differenze M_k-m_k (cioè l'oscillazione della funzione nell'intervallo I_k).

Per queste funzioni discontinue, conclude Lebesgue, il metodo di Riemann non funziona quasi mai, e quando funziona è, per così dire, un caso. Di fronte a tale difficoltà, Lebesgue ricorda che lo scopo era di ottenere degli intervalli in cui l'oscillazione della f fosse piccola, e per questo si divideva l'intervallo $[a, b]$ in intervalli sempre più piccoli, sperando che tale piccolezza si ripercuotesse sull'oscillazione della f.

Ora è chiaro che *se si vogliono ottenere insiemi in cui f varia poco, non si deve dividere l'intervallo* $[a, b]$ *dove la f è definita, ma l'intervallo* $[c, d] = [\inf f, \sup f]$, *immagine di* $[a, b]$ *tramite f.*

Dividiamo dunque $[c, d]$ in N parti mediante i punti $c = y_0 < y_1 <, \ldots, < y_N = d$, e definiamo

$$G_k = \{x \in [a, b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Se si pone

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} y_k \varphi_{E_k}(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{N} y_{k-1} \varphi_{G_k}(x)$$

le due funzioni φ e ψ sono una maggiorante e una minorante di f, e risulta

$$I(\varphi) - I(\psi) = \sum_{k=1}^{N} (y_k - y_{k-1}) \mathrm{m}(G_k)$$

quantità che può esser resa piccola a piacere raffinando la suddivisione di $[c, d]$ (teorema 2.3).

Naturalmente, agendo in questo modo si sono sostituiti agli intervalli I_k, la cui misura è nota elementarmente, degli insiemi G_k che possono essere anche molto complicati; di qui la necessità di avere una misura abbastanza generale da applicarsi al maggior numero possibile di insiemi.

La differenza tra l'integrale di Riemann e di Lebesgue è illustrata chiaramente da Lebesgue, nell'articolo summenzionato, per mezzo di un'analogia. Vediamola nelle sue stesse parole:

I geometri del diciassettesimo secolo consideravano l'integrale di $f(x)$ – la parola "integrale" non era ancora stata inventata, ma non importa – come la somma di un'infinità di indivisibili, ognuno dei quali era l'ordinata, positiva o negativa, di $f(x)$. Benissimo! Noi abbiamo semplicemente raggruppato insieme gli indivisibili di grandezza vicina. Abbiamo, come si dice in algebra, riunito termini simili. Si potrebbe dire che, secondo il procedimento di Riemann, si cerca di sommare gli indivisibili prendendoli nell'ordine nel quale ci sono forniti dalla variazione di x, come un commerciante confusionario che conta monete e biglietti a caso, nell'ordine in cui gli vengono dati, mentre noi operiamo come un commerciante metodico, che dice:

ho $\mathrm{m}(G_1)$ monete da 100, che valgono 100 $\mathrm{m}(G_1)$
ho $\mathrm{m}(G_2)$ monete da 500, che valgono 500 $\mathrm{m}(G_2)$
ho $\mathrm{m}(G_3)$ biglietti da 1000, che valgono 1000 $\mathrm{m}(G_3)$.

Tutto insieme, ho

$$S = 100\,\mathrm{m}(G_1) + 500\,\mathrm{m}(G_2) + 1000\,\mathrm{m}(G_3) + \cdots$$

I due procedimenti porteranno di certo il commerciante allo stesso risultato poiché per quanti soldi abbia c'è solo un numero finito di monete e di biglietti da contare. Ma per noi che dobbiamo sommare un numero infinito di indivisibili la differenza dei due metodi è di capitale importanza.

Con la nuova definizione di integrale si veniva così ad ampliare notevolmente il campo delle funzioni suscettibili di integrazione. Ma non è questo il solo né forse il più importante dei risultati che derivano da essa.

Di molto maggiore momento è infatti l'introduzione di una misura numerabilmente additiva che è determinata dalla necessità di misurare il più gran numero possibile di insiemi, ma che porta con sé analoghe proprietà per l'integrale, in primo luogo il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (teorema 4.3) che è una delle pietre angolari della teoria.

Non è possibile descrivere qui neanche sommariamente tutti i progressi che l'introduzione dell'integrale di Lebesgue ha fatto compiere all'analisi infinitesimale, anche perché sarebbe indispensabile nella maggior parte dei casi un linguaggio notevolmente tecnico.[7] Ci limiteremo invece alla discussione di alcuni punti.

Integrazione e primitive

Sia $f(x)$ una funzione sommabile, e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ la sua funzione integrale. E' vero che $F'(x) = f(x)$, cioè che F è una primitiva di f? E viceversa, se G è una primitiva di f: $G' = f$, si può affermare che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$?

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dà una risposta affermativa nel caso in cui $f(x)$ sia continua; quando però cade questa ipotesi i risultati sono tutt'altro che evidenti, e anzi la risposta può essere negativa.

Nel suo libro *Leçons sur l'intégration et la recherche des functions primitives* con un'analisi molto sottile che combina i risultati più riposti della teoria dell'integrazione con la teoria dei numeri derivati introdotti da Dini, Lebesgue dimostra i seguenti teoremi:

(a) *Se f è integrabile, F è continua, e risulta $F'(x) = f(x)$ per quasi ogni x.*

(b) *Viceversa, se G è derivabile, e la sua derivata è limitata, allora G' è integrabile e vale la formula*

$$G(x) - G(a) = \int_a^x G'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad [1]$$

Se G' non è limitata può non essere integrabile (come ad esempio la funzione $x \sin 1/x$). In questo caso Lebesgue dimostra che G' è integrabile se e solo se G è a variazione limitata.

Infine, questa ipotesi non è ancora sufficiente per la validità della relazione [1] (vedi esempio 3.4); per questa è necessario e sufficiente che la G sia "assolutamente continua", nozione introdotta e studiata da Giuseppe Vitali (1875-1932).

Spazi funzionali

Cauchy aveva limitato la definizione dell'integrale alle funzioni continue, o al massimo a quelle con un numero finito di punti di discontinuità. Successivamente, so-

[7] Maggiori dettagli si potranno trovare nel capitolo "Integrazione" degli *Elementi di storia della Matematica* di N. Bourbaki (Feltrinelli, Milano 1963), come pure nella voce "Misura" dell'*Enciclopedia Europea*, 12 voll. (Garzanti, Milano 1976).

prattutto ad opera di Riemann, la teoria dell'integrazione viene estesa a funzioni più generali, anche con infiniti punti di discontinuità. Tuttavia, a causa del meccanismo messo così bene in luce dal passo di Lebesgue riportato più sopra, l'integrale di Cauchy-Riemann si muove completamente sotto il segno della continuità, sia in positivo, come nel teorema dell'integrabilità delle funzioni continue, sia in negativo, l'integrabilità di una funzione essendo determinata dalla struttura dei suoi punti di discontinuità.

Il quadro cambia radicalmente con la teoria di Lebesgue, nella quale le funzioni continue svolgono un ruolo marginale, e anche le funzioni più bizzarre vengono assoggettate alle regole del calcolo.[8] Corrispondentemente, vengono introdotti e studiati spazi funzionali nei quali la continuità gioca un ruolo minore se non nullo: le funzioni a variazione limitata, le funzioni assolutamente continue.

In questo panorama occupano un posto di rilievo i cosiddetti spazi $L^p(\Omega)$, i cui elementi sono funzioni $f(\mathbf{x})$ tali che $|f(\mathbf{x})|^p$ è sommabile nell'aperto Ω di $\mathbf{R}^n$.

Se si introduce in $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p},$$

gli spazi $L^p(\Omega)$ sono completi, e dunque spazi di Banach.

L'importanza degli spazi L^p è andata sempre crescendo via via che se ne scopriva l'estrema versatilità nelle applicazioni, al punto che si può dire che essi in molti casi hanno preso il posto tradizionalmente occupato dalle funzioni continue. Una trasformazione analoga hanno subìto gli spazi C^1 (e più in generale C^k), che sono stati sostituiti in molte applicazioni dagli spazi $H^{1,p}$ (e $H^{k,p}$), delle funzioni con derivate in L^p, una generalizzazione al caso di più variabili della nozione di funzione assolutamente continua.

Già considerati nei loro lavori da Beppo Levi (1875-1961) e Leonida Tonelli, questi spazi sono stati poi studiati a fondo da C. B. Morrey e da S. L. Sobolev (sono noti appunto come *spazi di Sobolev*); essi sono alla base delle teorie moderne del calcolo delle variazioni e delle equazioni alle derivate parziali.

[8] Esempi di funzioni non integrabili (o, il che è equivalente, di insiemi non misurabili) secondo Lebesgue vengono trovati più tardi (in particolare nel 1905 da Vitali, vedi anche esempio 3.4): tutti fanno uso dell'assioma della scelta nella sua forma più generale; un assioma che solo di recente, dopo aver provocato non poche controversie, è diventato di uso comune (vedi il capitolo "Fondamenti della matematica" del già citato *Elementi di storia della matematica* di Bourbaki).