ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 05 - 20251030

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Identificare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni definite in tutto* $\mathbb{R}^2$

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1-1) \qquad g(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^4 \qquad h(x_1,x_2) = (1-x_1^2)x_2^2e^{-x_2^2}$$

ESERCIZIO 2. *Date le seguenti funzioni*

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \qquad h(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3$$

calcolarne il gradiente e la matrice hessiana. Usare le informazioni trovate per identificare e classificare i punti critici.

ESERCIZIO 3. *Trovare e classificare i punti critici di*

$$f(x_1,x_2) = x_1^3x_2 - 2x_2^2 + 3x_1^2x_2$$

Successivamente calcolare massimo e minimo assoluto di $f(x)$ *in* $Q = \{x : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1\}$.

ESERCIZIO 4. *Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione*

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1^2-x_2^2}(x_1^4 - x_2^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

ESERCIZIO 5. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado* 2 *e punto iniziale* $(0,0)$ *delle funzioni*

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1}\cos(x_2) \qquad g(x_1,x_2) = \cos(x_1+x_2)$$

$$h(x_1,x_2) = \sin(x_1^2+x_2^2) \qquad k(x_1,x_2) = \sin(2x_1 + x_2 + 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2)$$

ESERCIZIO 6. *Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni*

$$f(x_1,x_2) = x_1|x_1|x_2 \qquad g(x_1,x_2) = x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2 \qquad h(x_1,x_2) = x_1^2\ln(1+x_2) + x_1^2x_2^2$$

ESERCIZIO 7. *Determinare, se esistono, massimo e minimo in* $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le x_1\right\}$ *della funzione*

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_1x_2 - x_1^2x_2^2$$

Determinare l'estremo superiore e inferiore di f.

ESERCIZIO 8. *Determinare e classificare i punti critici della funzione*

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)(1-x_3^2) + x_3^2$$

ESERCIZIO 9. *Determinare e classificare i punti critici della funzione*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + x_2^2 + \frac{1}{x_3} + x_1 x_3$$

nell'aperto $A = \{x_1, x_3 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 10. *Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) della funzione*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - x_1^2 x_2^2$$

nel dominio $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 11. *Determinare massimo e minimo assoluti (spiegando perché esistono) della funzione*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

nell'insieme $E = \left\{ g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{4} \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 12. *Determinare gli eventuali punti di estremo locale di*

$$f(x_1, x_2) = (|x_1| + x_2) e^{-x_1 x_2}$$

ESERCIZIO 13. *Determinare gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione*

$$f(x_1, x_2) = 4x_2^2 - 4x_1^2 x_2^2 - x_2^4$$

ESERCIZIO 14. *Determinare* inf *e* sup *della funzione*

$$f(x_1, x_2) = \left[x_1^2 - (x_2 + 1)^2 \right] x_2 e^{-x_2}$$

nell'insieme $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0, |x_1| \leq x_2 + 1\}$ *e specificare se sono minimo e massimo di* f *in* D.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Identificare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni definite in tutto* $\mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 - 1) \qquad g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4 \qquad h(x_1, x_2) = (1 - x_1^2) x_2^2 e^{-x_2^2}$$

DISCUSSIONE. Procediamo con ordine iniziando dallo studio della funzone f, per la quale abbiamo che

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(2x_1 x_2 - x_2, x_1^2 - x_1 \right) \qquad x = (x_1, x_2) \text{ è critico se e solo se } \qquad \begin{cases} (2x_1 - 1)x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 = x_1(x_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

per cui troviamo due soli punti critici $A = (1, 0)$ e $O = (0, 0)$. La matrice hessiana nei punti critici vale

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2 & (2x_1 - 1) \\ (2x_1 - 1) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \qquad Hf(O) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Hf(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det[Hf(O)] = \det[Hf(A)] = -1 < 0$ possiamo dire che i due autovalori delle matrici sono discordi e non nulli, quindi i due punti critici sono dei punti di sella.
Consideriamo ora g per cui vale

$$\nabla g(x_1, x_2) = \left(2x_1, -4x_2^3 \right) \qquad \text{e} \qquad Hg(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12x^2 \end{pmatrix}$$

È facile verificare che l'unico punto critico è O, per tale punto la matrice hessiana risulta diagonale con un autovalore positivo ed uno nullo, quindi non possiamo concludere nulla sulla natura del punto stazionario. Però possiamo osservare che

$$\phi(t) = g(O + te_1) = t^2 \qquad e \qquad \psi(t) = g(O + te_2) = -t^4$$

questo significa che esistono punti arbitrariamente vicino ad O, del tipo $p_k = (1/k, 0)$, tali che $g(p_k) > 0$ e punti del tipo $q_k = (0, 1/k)$ dove $g(q_k) < 0$, questo implica che l'origine non può essere né un massimo locale né un minimo locale, quindi O è un punto di sella.
Infine interessiamoci di h, infatti abbiamo

$$\nabla h(x_1, x_2) = \left(-2x_1x_2^2e^{-x_2^2}, 2(1-x_1^2)x_2(1-x_2^2)e^{-x_2^2}\right) \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x_1x_2^2 = 0 \\ (1-x_1^2)x_2(1-x_2^2) = 0 \end{cases}$$

si noti che nelle equazioni del sistema che identifica i punti critici sono stati rimossi i fattori che non possono essere nulli. Dunque i punti critici della funzione h sono

$$A = (0, 1) \qquad B(0, -1) \qquad e \qquad P_s = (s, 0) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}$$

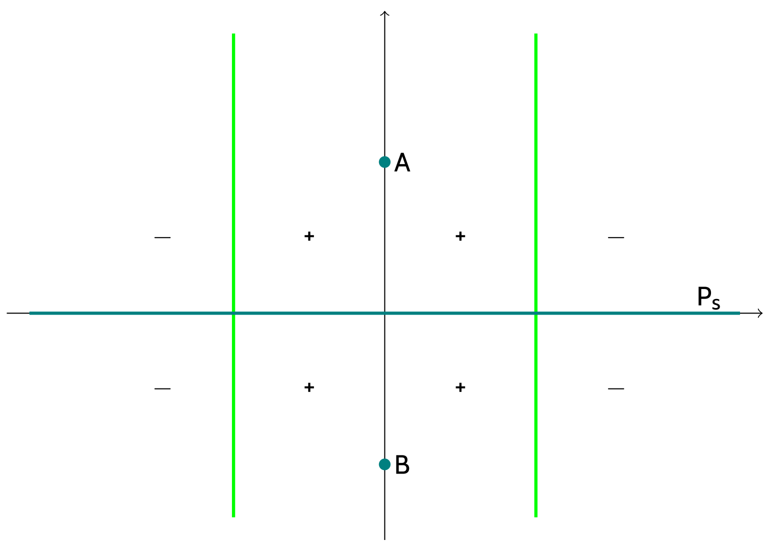
La matrice hessiana della funzione vale

$$Hh(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_2^2e^{-x_2^2} & -4x_1x_2(1-x_2^2)e^{-x_2^2} \\ -4x_1x_2(1-x_2^2)e^{-x_2^2} & 2(1-x_1^2)[1-5x_2^2+2x_2^2]e^{-x_2^2} \end{pmatrix}$$

e ne ricaviamo

$$Hh(A) = Hh(B) = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -4/e \end{pmatrix} \qquad e \qquad Hh(P_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1-s^2) \end{pmatrix}$$

notiamo che i punti A e B sono dei massimi, visto che la matrice hessiana ha autovalori negativi, mentre non possiamo dedurre nulla sulla natura dei punti P_s da $Hh(P_s)$, per cui dobbiamo proseguire nel nostro studio. Rappresentiamo con un disegno lo studio del segno della funzione h, dopo aver capito che gli zeri della funzione si trovano esclusivamente sulle rette $\{x_2 = 0\}$ e $\{x_1 = \pm 1\}$



Il disegno, o meglio lo studio del segno, prova che i punti P_s sono dei punti di massimo locale per $|s| > 1$, dei punti di minimo locale quando $|s| < 1$ e dei punti di sella per $|s| = 1$. ∎

ESERCIZIO 2. *Date le seguenti funzioni*

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1 + x_3^2) \qquad h(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3$$

calcolarne il gradiente e la matrice hessiana. Usare le informazioni trovate per identificare e classificare i punti critici.

DISCUSSIONE. Seguiamo alla lettera le disposizioni del testo scrivendo

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \qquad \nabla g(x_1,x_2,x_3) = \left(2(x_1-1), 2x_2, \frac{2x_3}{1+x_3^2}\right)$$

$$Hg(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1-x_3^2)}{(1+x_3^2)^2} \end{pmatrix}$$

l'unico punto critico della funzione, cioè l'unica soluzione del sistema $\nabla g(x_1,x_2,x_3) = 0$, è il punto $e_1 = (1,0,0)$, inoltre abbiamo che

$$Hg(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi il punto critico in questione è un punto di sella, visto che la matrice risulta non definita, in quanto ha un autovalore negativo e due positivi.
Per la funzione h possiamo scrivere

$$h(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2 \qquad \nabla h(x_1,x_2,x_3) = \left(4x_1(x_1^2+x_2^2) - x_2, 4x_2(x_1^2+x_2^2) - x_1, 2x_3\right)$$

$$Hh(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 12x_1^2+4x_2^2 & 8x_1x_2-1 & 0 \\ 8x_1x_2-1 & 4x_1^2+12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per identificare i punti critici della funzione dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x_1(x_1^2+x_2^2) = x_2 \\ 4x_2(x_1^2+x_2^2) = x_1 \end{cases} \qquad \text{sostituendo troviamo} \qquad x_2[16(x_1^2+x_2^2)^2 - 1] = 0$$

la soluzione $x_2 = 0$ ci permette di ottenere $x_1 = 0$, cioè il punto critico $O = (0,0)$, mentre la parentesi quadra è nulla se e solo se $(x_1,x_2) = (\cos(\theta)/2, \sin(\theta)/2)$, quindi $x_1^2 + x_2^2) = 1/4$ e abbiamo che il sistema si riduce a

$$\cos(\theta) = \sin(\theta) \qquad \text{da cui otteniamo} \qquad A = \frac{1}{4}(\sqrt{2},\sqrt{2},0) \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{4}(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$$

Scriviamo la matrice hessiana nei tre punti critici trovati

$$Hh(O) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Hh(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Hh(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, in tutti e tre i casi e_3 è un autovettore con autovalore 2. Gli altri due autovalori sono legati al minore di ordine 2 in alto a sinistra, perché è possibile suddividere la matrice in due blocchi legati ai sottospazi vettoriali generati da $[e_1,e_2]$ e da e_3.
Il fatto che $\det[Hh(O)] = -2 < 0$ ci permette di concludere subito che O è un punto di sella perché deve avere un autovalore negativo e due positivi.
Naturalmente il fatto che $Hh(A) = Hh(B)$ indica che i due punti critici avranno la stessa natura, come suggerisce la simmetria dell'espressione della funzione, il minore in alto a sinistra è tale che

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2 & -7/8 \\ -7/8 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{207}{64} > 0 \qquad \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 2 & -7/8 \\ -7/8 & 2 \end{pmatrix}\right] = 4 > 0$$

quindi il blocco ha due autovalori positivi, per cui i punti critici A e B sono due punti di minimo locale.
Per concludere l'esercizio interessiamoci alla terza funzione

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3 \qquad \nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1^2x_2x_3-1}{x_1^2}, \frac{x_1x_2^2x_3-1}{x_2^2}, \frac{x_1x_2x_3^2-1}{x_3^2}\right)$$

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2/x_1^3 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2/x_2^3 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 2/x_3^3 \end{pmatrix}$$

Poiché la funzione ha dominio massimale $\{x_1x_2x_3 \neq 0\}$ possiamo studiare il rapporto tra i numeratori delle derivate parziali ottenendo che

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1} = 1 \qquad \text{da cui} \qquad A = (1,1,1) \quad \text{e} \quad B = (-1,-1,-1)$$

A questo punto troviamo che

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Hf(B) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

con alcuni calcoli troviamo che

$$p(c) = \det[Hf(A) - cI] = -c^3 + 6c^2 - 9c + 4 = (c-1)^2(4-c)$$

quindi la matrice A ha tre autovalori positivi, per cui possiamo affermare cheA è un minimo locale di f. Calcoli analoghi ci permettono di ottenere

$$p(c) = \det[Hf(B) - cI] = -c^3 - 6c^2 - 9c - 4 = -(c+1)^2(c+4)$$

cioè B è un massimo locale, essendo tutti gli autovalri della sua matrice hessiana negativi. ■

ESERCIZIO 3. *Trovare e classificare i punti critici di*

$$f(x_1,x_2) = x_1^3x_2 - 2x_2^2 + 3x_1^2x_2$$

Successivamente calcolare massimo e minimo assoluto di $f(x)$ *in* $Q = \{x : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$.

DISCUSSIONE. Per definizione i punti critici di una funzione sono i punti p tali che $\nabla f(p) = 0$, quindi scriviamo il sistema di equazioni da discutere

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1,x_2) = 3x_1^2x_2 + 6x_1x_2 = 3x_1x_2[x_1+2] = 0 \\ \partial_2 f(x_1,x_2) = x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

la prima equazione ci fornisce le informazioni che affinché sia nulla la derivata $\partial_1 f(x_1,x_2)$ deve valere $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ o $x_1 = -2$, la seconda equazione ci permette di completare le precedenti informazioni per identificare i punti critici

$$\begin{array}{lll} \text{se} \quad x_1 = 0 & \text{allora} & x_2 = 0 \\ \text{se} \quad x_1 = -2 & \text{allora} & x_2 = 1 \\ \text{se} \quad x_2 = 0 & \text{allora} & x_1 = 0 \quad \text{o} \quad x_1 = -3 \end{array}$$

riassumendo abbiamo identificato i seguenti punti critici di f

$$O = (0,0) \qquad A = (-2,1) \qquad B = (-3,0)$$

per la loro classificazione ricorriamo allo studio della matrice hessiana

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_{11}f(x_1,x_2) & \partial_{12}f(x_1,x_2) \\ \partial_{21}f(x_1,x_2) & \partial_{22}f(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_2(x_1+1) & 3x_1(x_1+2) \\ 3x_1(x_1+2) & -4 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$Hf(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad Hf(A) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad Hf(B) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

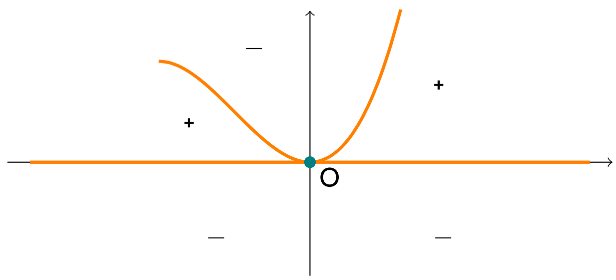
Dalla teoria sappiamo che il segno degli autovalori della matrice hessiana ci indica la natura del punto critico, e siccome il determinante della matrice è uguale al prodotto degli autovalori possiamo osservare che

$$\begin{array}{lll} \det[Hf(A)] = -12 < 0 & \text{quindi} & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \\ \det[Hf(B)] = -81 < 0 & \text{quindi} & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \end{array}$$

cioè A e B sono due punti di sella. La matrice hessiana Hf(O) è diagonale ed ha un autovalore nullo e l'altro negativo, quindi la matrice è semidefinita negativa, cioè il punto critico può essere o un punto di sella o un punto di massimo locale, poiché vale

$$f\left(0, e^{-k}\right) = -2e^{-2k} < 0 = f(0,0) \qquad f\left(e^{-k}, e^{-3k}\right) = 3e^{-5k} - e^{-6k} > 0 = f(0,0)$$

il punto risulta essere una sella. Il punto chiave della precedente osservazione risiede nel fatto che vicino ad O lo studio del segno della funzione produce il seguente disegno



visto che la funzione può essere fattorizzata nel seguente modo

$$f(x_1, x_2) = 2x_2\left(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^3 + \frac{3}{2}x_1^2\right)$$

il che suggerisce che il punto critico sia una sella. ■

ESERCIZIO 4. *Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione*

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2^2}(x_1^4 - x_2^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

DISCUSSIONE. La funzione f è regolare, precisamente di classe C^∞, in tutto il piano, e quindi in particolare nel dominio in cui dobbiamo studiarla, cioè $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 2\}$. L'esistenza del massimo e del minimo dell'applicazione è garantito dal teorema di Weierstrass, visto che f è continua e D compatto, perché chiuso e limitato. I punti di massimo e mnimo assoluti della funzione devono essere cercati tra i punti critici di f, cioè tra gli zeri del gradiente, e tra i punti del bordo di D. Iniziamo scrivendo le derivate parziali della nostra protagonista e il sistema che individua i punti critici dell'applicazione

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1[x_1^4 + 2x_1^2 - x_2^4]e^{x_1^2 - x_2^2} = 0 \\ \partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_2[x_2^4 + 2x_2^2 - x_1^4]e^{x_1^2 - x_2^2} = 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 2x_1[x_1^4 + 2x_1^2 - x_2^4] = 0 \\ 2x_2[x_2^4 + 2x_2^2 - x_1^4] = 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema scritto possiede chiaramente la soluzione O = (0, 0), che corrisponde ad aver annullato i primi due fattori nelle due equazioni, se vogliamo che siano nulle le due parentesi quadre, sommando otteniamo che $2x_1^2 + 2x_2^2 = 0$ che ha come soluzione solo $x_1 = x_2 = 0$, quindi possiamo concludere che O è l'unico punto critico interno a D. Notiamo che

$$f(0,0) = 0 \qquad f(t, 0) = t^4 e^{t^2} > 0 = f(0,0) \qquad f(0,t) = -t^4 e^{-t^2} < 0 = f(0,0)$$

quindi O è un punto di sella.
Per studiare la funzione lungo il bordo di D ricorriamo alla seguente parametrizzazione, $\partial D = \{2(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]\}$, da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= f(2\cos(\theta), 2\sin(\theta)) = 16[\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)]e^{4[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]} \\ &= 16[\cos^2(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta))]e^{4\cos(2\theta)} \\ &= 16[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]e^{4\cos(2\theta)} = 16\cos(2\theta)e^{4\cos(2\theta)} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

poiché vale

$$\phi'(\theta) = 16[-2\sin(2\theta) + 8\sin(2\theta)\cos(2\theta)]e^{4\cos(2\theta)} = 32\sin(2\theta)[4\cos(2\theta) - 1]e^{4\cos(2\theta)} = 0$$

solo se

$$\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi \qquad \theta = \alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, 2\pi - \alpha \qquad \text{dove } \alpha = \frac{1}{2}\arccos(1/4)$$

otteniamo i seguenti candidati come valori di massimo e minimo

$$f(\pm 2,0) = 16e^4 \qquad f(0,\pm 2) = -16e^{-4} \qquad f(2(\cos(\alpha),\sin(\alpha)) = 4e$$

il confronto diretto tra i valori calcolati ci permette di concludere che $\max(f) = f(\pm 2,0) = 16e^4$ mentre vale che $\min(f) = f(0,\pm 2) = -16e^{-4}$. ■

ESERCIZIO 5. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado* 2 *e punto iniziale* (0,0) *delle funzioni*

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1}\cos(x_2) \qquad g(x_1,x_2) = \cos(x_1+x_2)$$
$$h(x_1,x_2) = \sin(x_1^2+x_2^2) \qquad k(x_1,x_2) = \sin(2x_1+x_2+5x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2)$$

DISCUSSIONE. Ricordiamo che il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione f, rispetto al punto p, ha la seguente espressione

$$T_{2,f}(p,x) = f(p) + \nabla f(p)\cdot x + \frac{1}{2}Hf(p)x\cdot x$$

nel primo caso abbiamo che

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1}\cos(x_2) \qquad \nabla f(x_1,x_2) = (\cos(x_2)e^{x_1}, -\sin(x_2)e^{x_1})$$
$$HF(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_2)e^{x_1} & -\sin(x_2)e^{x_1} \\ -\sin(x_2)e^{x_1} & -\cos(x_2)e^{x_1} \end{pmatrix}$$

e in particolare vale

$$f(O) = 1 \qquad \nabla f(O) = (1,0) \qquad HF(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e possiamo scrivere il polinomio

$$\begin{aligned} T_{2,f}(O,x) &= f(O) + \nabla f(O)\cdot x + \frac{1}{2}Hf(O)x\cdot x = 1 + (1,0)\cdot(x_1,x_2) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(x_1,x_2)^t\cdot(x_1,x_2) \\ &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}(x_1,-x_2)\cdot(x_1,x_2) = 1 + x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

■

ESERCIZIO 6. *Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni*

$$f(x_1,x_2) = x_1|x_1|x_2 \qquad g(x_1,x_2) = x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2 \qquad h(x_1,x_2) = x_1^2\ln(1+x_2) + x_1^2x_2^2$$

DISCUSSIONE. Cerchiamo gli eventuali punti di massimo e minimo relativo tra i punti di non derivabilità della funzione (se esistono) e tra i punti critici cioè tra i punti che annullano il gradiente.
i. Notiamo subito che $\partial_2 f$ esiste in tutto il piano, mentre $\partial_1 f$ è definita sicuramente in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,x_{0,2}), x_{0,2}\in\mathbb{R}\}$. Studiamo l'esistenza della derivata rispetto a x_1 nei punti della forma $(0,x_{0,2})$, per i quali si ha

$$\partial_1 f(0,x_{0,2}) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(h,x_{0,2}) - f(0,x_{0,2})}{h} = x_{0,2}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h|h|}{h} = 0$$

quindi f è derivabile in tutto il piano $\mathbb{R}^2$.
Gli estremi relativi si cercano tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1,x_2) = 2|x_1|x_2 = 0 \\ \partial_2 f(x_1,x_2) = x_1|x_1| = 0 \end{cases} \qquad \text{e segue che} \qquad (0,x_{0,2}) \text{ è punto critico per ogni } x_{0,2}\in\mathbb{R}$$

Non possiamo costruire la matrice hessiana perché in tali punti critici non esiste $\partial_{11}f$. Si può concludere facilmente che i punti critici sono punti di sella dato che $f(0,x_{0,2}) = 0$ e $f(x_1,x_{0,2}) = x_1|x_2|x_{0,2}$ cambia segno a seconda che x_1 sia positivo o negativo.
ii. Poiché $g\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, possiamo trovare i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_1 g(x_1,x_2) = 4x_1(x_1 - 2x_2) = 0 \\ \partial_2 g(x_1,x_2) = -4x_1^2 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui otteniamo che} \qquad (0,0) \text{ è punto critico}$$

Costruiamo, derivando, la matrice hessiana

$$Hg(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 8(x_1 - x_2) & -8x_1 \\ -8x_1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e otteniamo che $Hg(0,0)$ è semidefinita positiva (ha un autovalore nullo e uno positivo), quindi il test dell'hessiano non ci permette di concludere alcunché. Però possiamo notare che lungo l'asse x_1 si ha $g(x_1,0) = x_1^4 > 0 = g(0,0)$, mentre sulla parabola $x_2 = x_1^2$ si ha $g(x_1,x_1^2) = -2x_1^4 < 0 = g(0,0)$, quindi l'origine non può essere un punto di massimo o minimo relativo, per cui deve essere un punto di sella.
iii. La funzione $h(x_1,x_2)$ è definita nell'insieme aperto $A = \{(x_1,x_2) : x_2 > -1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ed è $C^\infty(A)$. Come prima, per trovare i punti critici, cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 h(x_1,x_2) = 2x_1\left(\ln(1+x_2) + x_2^2\right) = 0 \\ \partial_2 h(x_1,x_2) = x_1^2\left(\dfrac{1}{1+x_2} + 2x_2\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è verificata se $x_1 = 0$ oppure se $\ln(1+x_2)+x_2^2 = 0$. Nel primo caso anche la seconda equazione è verificata per ogni x_2, quindi tutti i punti nella forma $(0,x_{0,2}) \in A$, cioè $(0,x_{0,2})$ con $x_{0,2} > -1$, sono punti stazionari, nel secondo caso si ha $x_2 = 0$ da cui segue che $x_1 = 0$. Scriviamo la matrice hessiana

$$Hh(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2\left(x_2^2 + \ln(x_2+1)\right) & 2x_1\left(2x_2 + \dfrac{1}{x_2+1}\right) \\ 2x_1\left(2x_2 + \dfrac{1}{x_2+1}\right) & x_1^2\left(2 - \dfrac{1}{(x_2+1)^2}\right) \end{pmatrix}$$

che nei punti stazionari vale

$$Hh(0,x_{0,2}) = \begin{pmatrix} 2\left(x_{0,2}^2 + \ln(x_{0,2}+1)\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Hh(0,x_{0,2})$ è semidefinita, avendo almeno un autovalore nullo, e il test dell'hessiano non ci permette di concludere. Studiamo, in un intorno di $(0,x_{0,2})$, la differenza $h(x_1,x_2) - h(0,x_{0,2}) = h(x_1,x_2)$. Osservando che

$$\begin{array}{lll} \ln(1+s)+s^2 < 0 & \text{se e solo se} & s \in (-1,0) \\ \ln(1+s)+s^2 = 0 & \text{se e solo se} & s = 0 \\ \ln(1+s)+s^2 > 0 & \text{se e solo se} & s \in (0,+\infty) \end{array}$$

possiamo concludere che

$$\begin{array}{rll} \text{se } x_{0,2} \in (0,+\infty) & \text{allora} & (0,x_{0,2}) \text{ è un punto di minimo relativo} \\ \text{se } x_{0,2} = 0 & \text{allora} & (0,x_{0,2}) \text{ è un punto di sella} \\ \text{se } x_{0,2} \in (-1,0) & \text{allora} & (0,x_{0,2}) \text{ è un punto di massimo relativo} \end{array}$$

il che termina l'esercizio. ■

Esercizio 7. *Determinare, se esistono, massimo e minimo in* $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le x_1\right\}$ *della funzione*

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_1x_2 - x_1^2x_2^2$$

Determinare l'estremo superiore e inferiore di f.

Discussione. L'insieme D rappresenta un disco di centro $(1/2,0)$ e raggio $1/2$ dato che

$$D = \left\{(x_1,x_2) : (x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 \le 1/4\right\}$$

quindi D è un insieme chiuso e limitato, la funzione f è continua in D (essendo un polinomio) e per il teorema di Weierstrass abbiamo che esistono

$$\max_D(f) \qquad \min_D(f)$$

Dobbiamo cercare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione tra i punti di non derivabilità (che in questo caso non ci sono), tra i punti critici liberi, cioè appartenenti all'interno di D e tra i punti di massimo o minimo relativo appartenenti alla frontiera di D.
I punti stazionari liberi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1, x_2) = x_2(x_2 - 1)(1 - 2x_1) = 0 \\ \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1(x_1 - 1)(1 - 2x_2) = 0 \end{cases}$$

che, con alcuni calcoli, sono i seguenti cinque punti

$$(1/2, 1/2) \qquad (1,1) \qquad (0,0) \qquad (0,1) \qquad (1,0)$$

notiamo che nessuno di questi punti è interno a D, quindi non possiamo tenerne conto.
Studiamo la funzione sulla frontiera $\partial D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = x_1\}$ tramite un sistema di coordinate polari. La scelta più immediata è, forse, la seguente

$$\partial D = \left\{ (x_1(\theta), x_2(\theta)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

che trasforma la funzione nel seguente modo

$$\begin{aligned} f(x_1(\theta), x_2(\theta)) &= \frac{1}{8}[1 + \cos(\theta)] \sin^2(\theta) + \frac{1}{8}[1 + \cos(\theta)]^2 \sin(\theta) - \frac{1}{4}[1 + \cos(\theta)] \sin(\theta) - \frac{1}{16}[1 + \cos(\theta)]^2 \sin^2(\theta) \\ &= \dots = \frac{1}{16} \sin^3(\theta) [2 - \sin(\theta)] := h(\theta) \end{aligned}$$

Poiché

$$h'(\theta) = \frac{1}{8} \cos(\theta) \sin^2(\theta)[3 - 2\sin(\theta)]$$

abbiamo conque valori critici per la variabile angolare: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, che corrispondo ai punti $(1,0)$, $(1/2, 1/2)$, $(0,0)$ e $(1/2, -1/2)$ da cui

$$f(1,0) = f(0,0) = 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} = \min_D(f) \qquad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} = \max_D(f)$$

In alternativa è possibile anche usare la seguente parametrizzazione di ∂D

$$\partial D = \{(\rho, \theta) : \rho(\theta) = \cos(\theta), \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

e poiché vale $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x_1(\theta), x_2(\theta)) &= f(\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta)) = -\cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)\left(1 - \cos^2(\theta)\right)(1 - \sin(\theta)\cos(\theta)) \\ &= \sin^3(\theta)\cos^3(\theta)[\sin(\theta)\cos(\theta) - 1] = \frac{1}{8}\sin^3(2\theta)\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta) - 1\right] =: g(\theta) \end{aligned}$$

Per studiare il problema possiamo ricondurci allo studio della funzione g, per la quale vale

$$g'(\theta) = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\cos(2\theta)[2\sin(\theta) - 3] = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \theta = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}$$

In corrispondenza di questi valori (legati ai precedenti) si trova

$$g(0) = g(\pm\pi/2) = 0 \qquad g(\pi/4) = -\frac{1}{16} \qquad g(-\pi/4) = \frac{3}{16}$$

e concludiamo nuovamente che

$$\max_D(f) = f(1/2, -1/2) = \frac{3}{16} \qquad \min_D(f) = f(1/2, 1/2) = -\frac{1}{16}$$

Volendo utilizzare la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo cercare i punti critici liberi della funzione di Lagrange

$$L(x_1, x_2, c) = -x_1 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - c(x_1^2 + x_2^2 - x_1)$$

quindi studiare il seguente sistema

$$\begin{cases} \partial_1 L = -x_2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2^2 - 2cx_1 + c = 0 \\ \partial_1 L = -x_1 + x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1^2 x_2 - 2cx_2 = 0 \\ \partial_3 L = x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

che si rivela un po' più ostico dello studio della derivata delle funzioni precedenti. Osserviamo che se $c = 0$ allora si ottengono i punti critici liberi dei quali abbiamo già osservato che $(0,0)$, $(1/2,1/2)$ e $(1,0)$ appartengono al vincolo ∂D, se invece $c \neq 0$ possiamo verificare (per sostituzione diretta) che il punto $(1/2,-1/2,-7/8)$ è soluzione del sistema, ma è difficile provare che non ce ne sono altri, come abbiamo ottenuto dallo studio precedente. Osserviamo che, in questo caso, il metodo di parametrizzazione del vincolo si è rivelato più efficacie del metodo dei moltiplicatori di Lagrange...
Per concludere osserviamo che la funzione f è illimitata inferiormente nel piano $\mathbb{R}^2$ dato che

$$f(s,s) = -(1-s)^2s^2 \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{s\longrightarrow+\infty} f(s,s) = -\infty$$

ma è anche illimitata inferiormente in quanto

$$f(s,1/4) = \frac{3}{16}(s-1)s \qquad \text{da cui} \qquad \lim_{s\longrightarrow+\infty} f(s,1/4) = +\infty$$

e possiamo affermare che l'immagine della funzione deve essere tutto l'asse reale. ■

ESERCIZIO 8. *Determinare e classificare i punti critici della funzione*

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)(1-x_3^2)+x_3^2$$

DISCUSSIONE. Cerchiamo i punti critici di $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f = 2x_1(1-x_3^2) = 0 \\ \partial_2 f = 2x_2(1-x_3^2) = 0 \\ \partial_3 f = 2x_3(1-x_1^2-x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Per la terza equazione deve essere $x_3 = 0$ oppure $x_1^2+x_2^2 = 1$. Se $x_3 = 0$ allora $x_1 = x_2 = 0$. Se $x_1^2+x_2^2 = 1$ allora, dalle prime due equazioni, non potendo essere x_1 e x_2 entrambi nulli, deve essere $x_3 = 1$ oppure $x_3 = -1$. In conclusione l'origine è un punto critico; inoltre tutti i punti delle circonferenze $\{x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ e $\{x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = -1\}$ sono punti critici.
Costruiamo la matrice hessiana

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2(1-x_3^2) & 0 & -4x_1x_3 \\ 0 & 2(1-x_3^2) & -4x_2x_3 \\ -4x_1x_3 & -4x_2x_3 & 2(1-x_1^2-x_2^2) \end{pmatrix}$$

Nell'origine abbiamo

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana è definita positiva (gli elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori della matrice), quindi per il test dell'hessiano $(0,0,0)$ è un punto di minimo relativo.
Nei punti della circonferenza $\{x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ si ha

$$H_f(x_1,x_2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4x_1 \\ 0 & 0 & -4x_2 \\ -4x_1 & -4x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si trova facilmente che $Hf(x_1,x_2,1)$ ha autovalori $-4,0,4$. Pertanto $H_f(x_1,x_2,1)$ è indefinita e, per il test dell'hessiano, tutti i punti della circonferenza $\{x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ sono punti di sella. Stessa conclusione vale per la circonferenza $\{x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = -1\}$. ■

ESERCIZIO 9. *Determinare e classificare i punti critici della funzione*

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1}+x_2^2+\frac{1}{x_3}+x_1x_3$$

nell'aperto $A = \{x_1,x_3 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

DISCUSSIONE. La funzione f, nell'aperto A è di classe C^∞, in particolare i suoi punti critici sono riconoscibili dallo studio del vettore gradiente

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (\partial_1 f(x_1,x_2,x_3), \partial_2 f(x_1,x_2,x_3), \partial_3 f(x_1,x_2,x_3)) = \left(x_3 - \frac{1}{x_1^2}, 2x_2, x_1 - \frac{1}{x_3^2}\right)$$

il sistema $\nabla f = O$ possiede, in A le seguenti soluzioni

$$\left(x_3 - \frac{1}{x_1^2}, 2x_2, x_1 - \frac{1}{x_3^2}\right) = (0,0,0) \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} x_3 = 1/x_1^2 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 = 1/x_3^2 = x_1^4 \end{cases}$$

cioè il solo punto critico è $P = (1,0,1)$. Proseguiamo con lo studio della matrice hessiana per classificare P

$$\partial_{11} f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_1^3} \qquad \partial_{12} f(x_1,x_2,x_3) = 0 \qquad \partial_{22} f(x_1,x_2,x_3) = 2$$

$$f_{23}(x_1,x_2,x_3) = 0 \qquad \partial_{33} f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_3^3} \qquad \partial_{13} f(x_1,x_2,x_3) = 1$$

da cui segue

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 6 = 0$$

avendo il polinomio caratteristico i segni alternati le sue radici sono tutte positive (per il teorema di Cartesio), quindi la matrice $H_f(P)$ è definita positiva e possiamo concludere che il punto critico è un punto di minimo locale. In realtà possiamo dire qualcosa di più: osserviamo che la funzione diventa molto grande quando l'argomento tende la bordo di A. Infatti avvicinandosi a ∂A vale

$$\lim_{x_1 \longrightarrow 0^+} f(x_1,x_2,x_3) = +\infty \qquad \lim_{x_3 \longrightarrow 0^+} f(x_1,x_2,x_3) = +\infty$$

mentre se $|(x_1,x_2,x_3)| \longrightarrow +\infty$, cioè se $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \longrightarrow +\infty$, segue che

$$\lim_{|(x_1,x_2,x_3)| \longrightarrow 0^+} f(x_1,x_2,x_3) = +\infty$$

perché vale l'alternativa o esplode x_2^2 oppure esplode il prodotto x_1x_3 o una delle frazioni rimanenti (questo perché almeno una delle tre variabili deve tendere a $+\infty$). Quanto provato implica che la funzione è coercitiva in A, e quindi possiede un minimo assoluto che deve essere necessariamente P, visto che non ci sono altri punti critici. ■

ESERCIZIO 10. *Determinare massimo e minimo assoluti (se esistono) della funzione*

$$f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2)^2 - x_1^2 x_2^2$$

nel dominio $D = \{x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

DISCUSSIONE. La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, in particolare, continua in D (insieme chiuso e limitato, quindi compatto), quindi per il teorema di Weierstrass abbiamo che f possiede massimo e minimo assoluti. Cerchiamo i suoi punti critici studiando il sistema $\nabla f(x_1,x_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_2) - 2x_1x_2^2 = 0 \\ -2(x_1 - x_2) + 2x_1^2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e sommando} \qquad \begin{cases} x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \\ 2(x_1 - x_2) = 2x_1^2x_2 \end{cases}$$

Partendo dalla prima equazione, se $x_1 = 0$ abbiamo che $x_2 = 0$, se $x_2 = 0$ segue che $x_1 = 0$ e infine se $x_1 = x_2$ troviamo $2x_1^3 = 0$, insomma in tutti i casi segue che l'unico punto critico interno è $O = (0,0)$ in cui l'hessiana vale

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

tale matrice ha determinante nullo, quindi non è d'aiuto per determinare la natura del punto critico. In ogni caso è sufficiente osservare che

$$f(s,s) = -s^4 \qquad f(s,-s) = 4s^2 - s^4$$

per poter concludere che $(0,0)$ è una sella.
A questo punto possaimo studiare il comportamente della funzione sul bordo di D parametrizzando la circonferenza e componendo le equazioni con la funzione, in modo da ottenere la seguente funzione di una variabile reale

$$\begin{aligned} F(t) &= f(\cos(t),\sin(t)) = (\cos(t)-\sin(t))^2 - \sin^2(t)\cos^2(t) \\ &= 1 - \sin(2t) - \frac{1}{4}\sin^2(2t) \qquad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

e siccome l'equazione

$$F'(t) = -2\cos(2t) - \sin(2t)\cos(2t) = -\cos(2t)[2+\sin(2t)] = 0$$

ha soluzione per $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, abbiamo identificato 4 punti critici

$$\begin{aligned} &A = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) && B = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ &C = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) && D = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \end{aligned}$$

e vale

$$f(A) = f(C) = -\frac{1}{4} \qquad f(B) = f(D) = \frac{7}{4}$$

da cui segue che $\max(f) = 7/4$ e $\min(f) = -1/4$. ■

ESERCIZIO 11. *Determinare massimo e minimo assoluti (spiegando perché esistono) della funzione*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

nell'insieme $E = \left\{ g(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{4} \le 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

DISCUSSIONE. Cominciamo osservando che l'insieme E è chiuso, perché g è continua in $\mathbb{R}^3$ ed E è la controimmagine della semiretta chiusa $(-\infty, 1]$, inoltre l'insieme e anche limitato, infatti vale

$$\left\{ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{4} \le 1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{4} \le 1 \right\}$$

cioè $E \subseteq B(O, 2) \subseteq \mathbb{R}^3$. Questo significa che E è un insieme compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, possiamo essere sicuri dell'esistenza di massimo e minimo assoluti, come richiesto dal testo dell'esercizio.
Sappiamo che gli evenutali punti critici di f interni ad E sono riconoscibili perché hanno vettore gradiente nullo, quindi partiamo dallo studio delle componenti di ∇f

$$\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 \qquad \partial_2 f(x_1,x_2,x_3) = 2x_2 \qquad \partial_3 f(x_1,x_2,x_3) = 2x_3$$

tale vettore è nullo se e soltanto se $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) = O$, e $f(O) = f(0,0,0) = 0$ quindi tale punto è un punto di minimo assoluto della funzione, che è composta da una somma di quadrati, quindi sempre non negativa. Tale punto è l'unico punto di minimo assoluto della funzione, mentre (per forza di cose) il massimo assoluto deve essere assunto sulla frontiera del dominio, cioè sull'insieme

$$\partial E = \left\{ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{4} = 1 \right\}$$

Possiamo descrivere l'ellissoide nel seguente modo

$$(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) = \left(\sqrt{2}\sin(u)\cos(v), \sqrt{3}\sin(u)\sin(v), 2\cos(u) \right)$$

con $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$, "deformando" la descrizione della sfera data dalle coordinate sferiche standard in $\mathbb{R}^3$. Componendo le due applicazioni abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= f(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))\\ &= 2\sin^2(u)\cos^2(v) + 3\sin^2(u)\sin^2(v) + 4\cos^2(u)\\ &= 2 + \sin^2(u)\sin^2(v) + 2\cos^2(u)\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}&\Phi_u(u,v) = 2\sin(u)\cos(u)\sin^2(v) - 4\sin(u)\cos(u) = \sin(2u)[\sin^2(v) - 2] = 0\\ &\Phi_v(u,v) = 2\sin^2(u)\sin(v)\cos(v) = \sin^2(u)\sin(2v) = 0\\ &\qquad (u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]\end{aligned}$$

i punti critici della funzione composta Φ sono $(0,v)$ e (π,v), per ogni $v \in [0,2\pi]$, $(\pi/2,0)$, $(\pi/2,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi)$, $(\pi/2,3\pi/2)$ e $(\pi/2,2\pi)$, e tornando alle coordinate cartesiane nello spazio otteniamo (rispettivamente) i punti

$$N = (0,0,2) \qquad S = (0,0,-2) \qquad A = (\sqrt{2},0,0)$$
$$B = (0,\sqrt{3},0), \qquad C = (-\sqrt{2},0,0) \qquad D = (0,-\sqrt{3},0)$$

sostituendo nella funzione f otteniamo

$$f(N) = f(S) = 4 \qquad f(A) = f(C) = 2 \qquad f(B) = f(D) = 3$$

e possiamo concludere che il massimo e il minimo assoluti della funzione sono i seguenti

$$\max_E(f) = 4 \qquad \min_E(f) = 0$$

Volendo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo cercare i punti critici liberi della funzione lagrangiana

$$L(x_1,x_2,x_3,p) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p\left[\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{4} - 1\right]$$

cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases}\partial_1 L(x_1,x_2,x_3,p) = 2x_1 - px_1 = (2-p)x_1 = 0\\ \partial_2 L(x_1,x_2,x_3,p) = 2x_2 - 2px_2/3 = 2(1-p/3)x_2 = 0\\ \partial_3 L(x_1,x_2,x_3,p) = 2x_3 - 2px_3 = 2(1-p)x_3 = 0\\ \partial_4 L(x_1,x_2,x_3,p) = x_1^2/2 + x_2^2/3 + x_3^2/4 - 1 = 0\end{cases}$$

le prime tre equazioni impongono che o una delle variabili spaziali sia nulla o che p assuma un preciso valore diverso da 0, analizziamo le alternative che ne scaturiscono:
i. se $p = 2$ allora segue che $x_2 = x_3 = 0$ e la quarta equazione impone il valore $x_1 = \pm\sqrt{2}$, quindi ritroviamo i punti A ed C,
ii.$p = 3$ allora segue che $x_1 = x_3 = 0$ la quarta equazione ci dice che $x_2 = \pm\sqrt{3}$, quindi abbiamo i punti B ed D,
iii. $p = 4$ allora segue che $x_1 = x_2 = 0$ la quarta equazione ci dice che $x_3 = \pm 1$, quindi abbiamo i punti N ed S,
iv. se $p \neq 2,3,4$ allora $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ma il punto O non soddisfa la quarta equazione (quella del vincolo).
In questo modo abbiamo ritrovato i risultati della precedente analisi, confermando che metodi diversi (applicati correttamente) portano sempre ai risultati corretti! Da un punto di vista geometrico il metodo dei moltiplicatori di Lagrange mostra che i punti critici vincolati P sono punti in cui i vettori $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ sono paralleli, ed entrambi risultano ortogonali a tutte e due le superfici di livello $\{g(x,y,z) = 0\}$ e $\{f(x,y,z) - f(P) = 0\}$ cioè le due superfici di livello hanno lo stesso piano tangente, cioè (in ultima analisi) sono tangenti tra di loro... ■

ESERCIZIO 12. *Determinare gli eventuali punti di estremo locale di*

$$f(x_1,x_2) = (|x_1| + x_2)e^{-x_1x_2}$$

DISCUSSIONE. Per $x_1 \neq 0$, cioè per $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1 = 0\}$, la funzione f è derivabile essendo composizione di funzioni derivabili, quindi possiamo calcolarne il gradiente. Essendo

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases}(x_1 + x_2)e^{-x_1x_2} & \text{se } x_1 > 0\\ (-x_1 + x_2)e^{-x_1x_2} & \text{se } x_1 < 0\end{cases}$$

abbiamo che

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{-x_1x_2}(1 - x_1x_2 - x_2^2, 1 - x_1x_2 - x_1^2) & \text{se } x_1 > 0 \\ e^{-x_1x_2}(-1 + x_1x_2 - x_2^2, 1 - x_1x_2 + x_1^2) & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

Quindi il gradiente si annulla nei punti che risolvono uno dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ 1 - x_1x_2 - x_2^2 = 0 \\ 1 - x_1x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x_1 < 0 \\ -1 + x_1x_2 - x_2^2 = 0 \\ 1 - x_1x_2 + x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ha come unica soluzione il punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, mentre il secondo non ammette soluzioni, quindi possiamo limitarci allora a calcoare la matrice Hessiana di f solo per $x_1 > 0$:

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{-x_1x_2}(-2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) & e^{-x_1x_2}(-2x_1 - 2x_2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2) \\ e^{-x_1x_2}(-2x_1 - 2x_2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2) & e^{-x_1x_2}(-2x_1 + x_1^2x_2 + x_1^3) \end{pmatrix}$$

da cui

$$Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}e^{-1/2} & -\frac{3}{2}e^{-1/2} \\ -\frac{3}{2}e^{-1/2} & -\frac{1}{2}e^{-1/2} \end{Bmatrix} \qquad \det\left[Hf\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right] = -3/2e < 0$$

perciò $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ è un punto di sella.
Resta da verificare se f ammette eventuali punti di estremo locale sull'asse x_2, per fare ciò definiamo la restrizione di f all'asse x_2:

$$g(x_2) = f(0, x_2) = x_2$$

ma questa è una funzione crescente, quindi f non ammette né massimi né minimi locali. ■

ESERCIZIO 13. *Determinare gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione*

$$f(x_1,x_2) = 4x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 - x_2^4$$

DISCUSSIONE. Osserviamo innanzitutto che la funzione, essendo un polinomio, è ovunque derivabile, quindi i punti di estremo locale e globale sono punti dove il gradiente si annulla.
Quindi essendo $\nabla f(x_1,x_2) = (-8x_1x_2^2, 8x_2 - 8x_1^2x_2 - 4x_2^3)$, abbiamo che i punti critici di f sono i seguenti:

$$(0, \sqrt{2}) \qquad (0, -\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad (s, 0) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -8x_2^2 & -16x_1x_2 \\ -16x_1x_2 & 8 - 8x_1^2 - 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

perciò

$$H_f(0, \sqrt{2}) = H_f(0, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

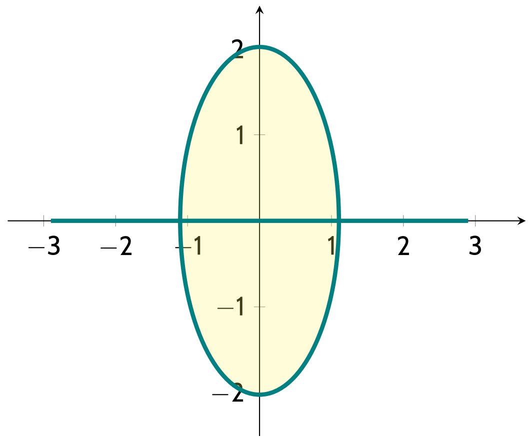
e dunque $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo per f. Invece

$$H_f(s, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 - 8s^2 \end{pmatrix}$$

quindi per tutti i valori di s dobbiamo fare un'analisi ulteriore.
In questo caso studiando globalmente il segno della funzione vediamo facilmente che, essendo

$$f(x_1,x_2) = x_2^2(4 - 4x_1^2 - x_2^2)$$

f si annulla se $x_2 = 0$ o se (x_1,x_2) appartiene all'ellisse $\{4x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ (curve in blu nella figura), mentre f è positiva all'interno dell'ellisse per $y \neq 0$ (regione in arancione nella figura) e negativa altrove.



Dallo studio del segno possiamo quindi concludere direttamente che i punti $(s, 0)$ sono di massimo locale se $|s| > 1$, di minimo locale se $|s| < 1$ e di sella se $|s| = 1$.
Determiniamo ora estemo inferiore e superiore di f in $\mathbb{R}^2$ e vediamo se sono assunti, cioè se si tratta di minimo e/o massimo globale.
Abbiamo che

$$f(x_1, x_2) = x_2^2(4 - 4x_1^2 - x_2^2) \leq x_2^2(4 - (x_1^2 + x_2^2)) \longrightarrow -\infty \qquad \text{per } \|(x_1, x_2)\|_2 \longrightarrow +\infty$$

quindi $\inf_{\mathbb{R}^2}(f) = -\infty$ e poiché la funzione $-f$ è coercitiva (oltre che continua) ammette massimo assoluto per il teorema di Weierstrass per funzioni coercitive. Quindi f possiede massimo assoluto e il massimo assoluto (essendo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$) è assunto in un punto critico di f. Confrontando il valore di f nei punti critici ($f(0, \sqrt{2}) = f(0, -\sqrt{2}) = 4 > 0 = f(s, 0)$) otteniamo che il massimo globale (o massimo assoluto) è 4. ■

ESERCIZIO 14. *Determinare* inf *e* sup *della funzione*

$$f(x_1, x_2) = \left[x_1^2 - (x_2 + 1)^2\right] x_2 e^{-x_2}$$

nell'insieme $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0, |x_1| \leq x_2 + 1\}$ *e specificare se sono minimo e massimo di* f *in* D.

DISCUSSIONE. La funzione f è di classe C^∞ quindi possiamo calcolare

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(2x_1x_2e^{-x_2}, e^{-x_2}(x_1^2(1 - x_2) + x_2^3 - x_2^2 - 3x_2 - 1)\right)$$

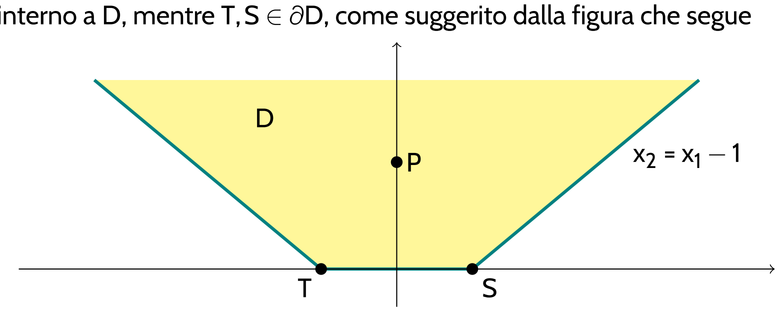
da cui abbiamo che i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_1^2(1 - x_2) + x_2^3 - x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Quindi i punti critici di f sono

$$P(0, 1 + \sqrt{2}) \qquad Q(0, 1 - \sqrt{2}) \qquad R(0, -1) \qquad S(1, 0) \qquad T(-1, 0)$$

ma solo il primo è interno a D, mentre $T, S \in \partial D$, come suggerito dalla figura che segue



Inoltre si vede facilmente che sul bordo di D, poiché o $y = 0$ o $x_1^2 = (x_2 + 1)^2$, f è identicamente nulla.
D'altronde osservando che in D $x_1^2 \leq (x_2 + 1)^2$ si vede facilmente che $f(x_1, x_2) \leq 0$ in D, quindi 0 è un massimo assoluto di f in D (e quindi anche $\sup_D(f)$). Analizziamo il comportamento di f per $(x_1, x_2) \in D$ quando $|(x, y)| \longrightarrow$

$+\infty$

$$\lim_{D\ni x:\|x\|\longrightarrow+\infty}|f(x,y)| = \lim_{D\ni x:\|x\|\longrightarrow+\infty}\left|(x_1^2-(x_2+1)^2)x_2e^{-x_2}\right|$$
$$= \lim_{D\ni x:\|x\|\longrightarrow+\infty}((x_2+1)^2-x_1^2)x_2e^{-x_2} \leq \lim_{x_2\longrightarrow+\infty}(x_2+1)^2x_2e^{-x_2} = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{D\ni x:\|x\|\longrightarrow+\infty} f(x_1,x_2) = 0$$

Per definizione di limite, dalla precedente relazione segue che, fissato $m = f(0,-1+\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}} < 0$, esiste $R_m > 0$ tale che

$$f(x_1,x_2) > m \qquad \text{per ogni } (x,y)\in D \text{ tale che } \|x\| > R_m$$

cioè per ogni $(x_1,x_2)\in D\setminus\overline{B(O,R_m)}$.
D'altronde, essendo $\overline{B(O,R_m)}$ chiuso e D chiuso (in quanto intersezione di contoimmagini, tramite funzioni continue, di chiusi), anche la loro intersezione $\overline{B(O,R_m)}\cap D$ è un chiuso quindi per il teorema di Weierstrass la funzione continua f ammette minimo assoluto in $\overline{B(O,R_m)}\cap D$ e per definizione

$$\min_{\overline{B(O,R_m)}\cap D} f(x_1,x_2) \leq m < 0$$

Ma allora, poiché $f\equiv 0$ su ∂D, il minimo di f su $\overline{B(O,R_m)}\cap D$ è assunto in un punto interno di D e quindi, visto che f è derivabile, il gradiente di f si annulla nel/nei punti di minimo assoluto. Quindi $(0,-1+\sqrt{2})$ è un punto di minimo assoluto di f in $\overline{B(O,R_m)}\cap D$. Allora $f(0,-1+\sqrt{2}) = m$ è un minimo assoluto di f in D (e quindi anche $\inf_D(f)$), visto che

$$m \leq f(x_1,x_2) \quad \text{per ogni } (x_1,x_2)\in\overline{B(O,R_m)}\cap D$$
$$m < f(x_1,x_2) \quad \text{per ogni } (x_1,x_2)\in\overline{D}\setminus B(O,R_m)$$

per quanto discusso precedentemente. ■