

27/10/2025

ESERCIZIO 17. Sia $f: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ continua, allora $f^{-1}([0,1])$ è compatto in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

□

~~□~~

Considero la funzione $f(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
e vale che $f^{-1}([0,1]) = \mathbb{R}^2$ che non è compatto.

TEOR.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora

i. $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ chiuso $\Rightarrow f^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso

ii. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
(vale anche il viceversa).

~~□~~

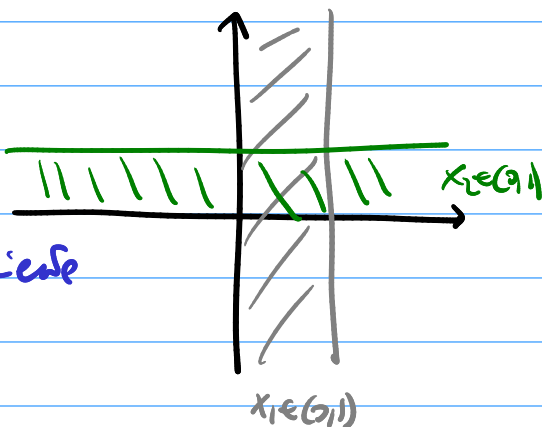
ESERCIZIO 20. Sia $f: (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ continua, allora $f^{-1}((0,1)^3)$ è aperto in $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$.

$$(0,1)^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in (0,1), x_2 \in (0,1), x_3 \in (0,1)\}$$
$$(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{7} \sin^2(10^3 x_1) \sin^2(10^3 x_2) \sin^2(10^5 x_3)$$

L'affermazione è falsa, infatti è sufficiente considerare la funzione costante

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$, $f^{-1}((0,1)^3) = \emptyset$ e
 $\{1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.



ESERCIZIO 4. Date $u, w \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $F, H \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, si verifichino le seguenti identità

$$\nabla \cdot (uH)(x) = \nabla u(x) \cdot H(x) + u(x)(\nabla \cdot H(x))$$

$$\nabla \wedge (uH)(x) = \nabla u(x) \wedge H(x) + u(x)(\nabla \wedge H(x))$$

$$\nabla \cdot (F \wedge H)(x) = \nabla \wedge F(x) \cdot H(x) - F(x) \cdot \nabla \wedge H(x)$$

$$\nabla \cdot \nabla w(x) = \Delta w(x)$$

$$\nabla \wedge \nabla w(x) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \wedge H(x) = 0$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge H(x) = \nabla[\nabla \cdot H(x)] - \Delta H(x)$$

prestando attenzione alle dimensioni degli oggetti coinvolti. Poi si riscrivano le identità usando le notazioni $\text{div}[F] := \nabla \cdot F$ e $\text{rot}[F] := \nabla \wedge F$.

$$\begin{aligned} \text{i. } \nabla \cdot (uH)(x) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (u(x)H_1(x), u(x)H_2(x), u(x)H_3(x)) \\ &= \partial_1(u(x)H_1(x)) + \partial_2(u(x)H_2(x)) + \partial_3(u(x)H_3(x)) \\ &= \partial_1 u(x) H_1(x) + \underbrace{u(x) \partial_1 H_1(x)} + \partial_2 u(x) H_2(x) + \underbrace{u(x) \partial_2 H_2(x)} + \partial_3 u(x) H_3(x) + \underbrace{u(x) \partial_3 H_3(x)} \\ &= \nabla u(x) \cdot H(x) + u(x) [\partial_1 H_1(x) + \partial_2 H_2(x) + \partial_3 H_3(x)] \\ &= \nabla u(x) \cdot H(x) + u(x) (\nabla \cdot H(x)) \end{aligned}$$

↑ divergenza di H

$$\text{iii. } \nabla \cdot (F \wedge H)(x) = \nabla \cdot (F_2 H_3 - F_3 H_2, F_3 H_1 - F_1 H_3, F_1 H_2 - F_2 H_1)(x)$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = (F_2(x)H_3(x) - F_3(x)H_2(x), F_3H_1 - H_3F_1, F_1H_2 - F_2H_1)$$

$$= (\partial_1(F_2H_3 - F_3H_2), \partial_2(F_3H_1 - F_1H_3), \partial_3(F_1H_2 - F_2H_1))(x)$$

$$= \underbrace{\partial_1 F_2} H_3 + F_2 \underbrace{\partial_1 H_3} - \underbrace{\partial_1 F_3} H_2 - F_3 \underbrace{\partial_1 H_2} + \underbrace{\partial_2 F_3} H_1 + F_3 \underbrace{\partial_2 H_1} - \underbrace{\partial_2 F_1} H_3 - F_1 \underbrace{\partial_2 H_3} + \underbrace{\partial_3 F_1} H_2 + F_1 \underbrace{\partial_3 H_2} - \underbrace{\partial_3 F_2} H_1 - F_2 \underbrace{\partial_3 H_1}$$

$$= (H_1, H_2, H_3) \cdot (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$+ (F_1, F_2, F_3) \cdot (\partial_3 H_2 - \partial_2 H_3, \partial_1 H_3 - \partial_3 H_1, \partial_2 H_1 - \partial_1 H_2)$$

$$= H \cdot (\nabla \wedge F) - F \cdot (\nabla \wedge H) = (\nabla \wedge F) \cdot H - F \cdot (\nabla \wedge H)$$

ESERCIZIO 2. Date la funzione

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi dove perché la funzione è differenziabile,

ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,

iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 1, 1, g(1, 1, 1))$, la giacitura del piano tangente e un vettore normale al grafico.

i. $\partial_1 g(x) = x_2 + x_3$; $\partial_2 g(x) = x_1 + x_3$; $\partial_3 g(x) = x_1 + x_2 \in C^0(\mathbb{R}^3)$

poiché $\partial_i g \in C^0(\mathbb{R}^3)$ $\forall i=1,2,3$ per il teorema del diff. totale
 g è differenziabile in $\mathbb{R}^3$

ii. $Dg(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii. $g(1,1,1) = 3$ l'equazione del piano tangente

$$x_4 = g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) = 3 + (2, 2, 2) \cdot (x - (1, 1, 1))$$

$$p: \{x_4 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3\} \text{ piano tangente al grafico di } g \text{ nel punto } (1, 1, 1, \underset{g(1,1,1)}{3})$$

$$A(0, 0, 0, -3) \in p$$

$$B(1, 0, 0, -1) \in p$$

$$C(0, 1, 0, -1) \in p$$

$$D(0, 0, 1, -1) \in p$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{BA} &= (1, 0, 0, 2) \\ \vec{CA} &= (0, 1, 0, 2) \\ \vec{DA} &= (0, 0, 1, 2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (B-A) \\ \text{giacitura dello} \\ \text{spazio tangente } \varphi \end{array}$$

$$p: \{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3 = 0\}$$

$$\uparrow \\ \nabla F(x) = (2, 2, 2, -1)$$

ESERCIZIO 1. Date le seguenti leggi

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3$$

i. si spieghi dove ogni espressione ha senso e dove è differenziabile,

ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,

iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 1, 1, f_1(1, 1, 1))$.

$$f_1(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \quad x \in \mathbb{R}^3$$

i. f_1 è composizione e somma di polinomi e $\ln$ (fun C^∞)
quindi $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, quindi è differenziabile in tutto
lo spazio.

$$u. \quad \partial_1 f_1(x) = 2x_1 - 2; \quad \partial_2 f_1(x) = 2x_2; \quad \partial_3 f_1(x) = \frac{2x_3}{1+x_3^2}$$

$$\nabla f_1(x) = \left(2(x_1 - 1), 2x_2, \frac{2x_3}{1+x_3^2} \right)$$

$$Hf_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\partial_{33} f_1(x) = \frac{2(1+x_3^2) - 2x_3 \cdot 2x_3}{(1+x_3^2)^2} = \frac{2(1-x_3^2)}{(1+x_3^2)^2}$$

$$iii. \quad f_1(1, 1, 1) = \ln(2) \quad \nabla f_1(1, 1, 1) = (0, 2, 1)$$

$$\{x_4 = f_1(1, 1, 1) + \nabla f_1(1, 1, 1) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1)\}$$

$$\{x_4 = \ln(2) + 2(x_2 - 1) + (x_3 - 1) = 2x_2 + x_3 + \ln(2) - 3\}$$

ESERCIZIO 27. La funzione $f(x) = \|x\|_2$ è differenziabile in $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = \|x\|_2 = [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$$

$$x \quad n=1$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(0)=0 \quad \text{e} \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|te_1\|_2 - \|0\|_2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{non esiste}$$

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $x_0=0$.

ESERCIZIO 19. Sia $f: (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ continua, allora $f([0,1]^3)$ è compatto in $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$.



f è continua e $[0,1]^3$ è compatto

$\Rightarrow \exists p, q \in [0,1]^3$ tali che $f(p) = \min_{[0,1]^3} f \leq f(q) = \max_{[0,1]^3} f$
(Teor. Weierstrass)

$\Rightarrow f([0,1]^3) = [f(p), f(q)] \subseteq \mathbb{R}$
 $\uparrow$ chiuso e limitato

TEOREMA
WEIERSTRASS

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua
 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto

allora $\exists p, q \in D$ tali che
 $f(p) = \min_D f \leq f(q) = \max_D f \quad \forall x \in D$

Dimo $\{x_k\} \subseteq D$ successione minimizzante

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(x_k) \leq \inf_D f + \frac{1}{k}$$

$\{x_k\} \subseteq D$ compatto $\Rightarrow \exists x_{k(j)} \rightarrow p \in D$

$$\Rightarrow \inf_D f \leq f(x_{k(j)}) \leq \inf_D f + \frac{1}{k(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \inf_D f$$

$$\downarrow$$

$$\inf_D f \leq f(p) \leq \inf_D f$$

OSS.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable

$$\partial_w f(p) = w \cdot \nabla f(p) \quad \forall w \in S^{n-1}$$

$$|\partial_w f(p)| \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|w\|_2 \|\nabla f(p)\|_2$$

$$|w \cdot \nabla f(p)| = \|w\|_2 \|\nabla f(p)\|_2 |\cos(\vartheta)| \Rightarrow \vartheta = 0 \text{ or } \pi$$

$\uparrow$
h?

$$\times \vartheta = 0 \Rightarrow w = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|_2} \leftarrow \text{shifts towards}$$

$$\times \vartheta = \pi \Rightarrow w = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|_2} \leftarrow \text{discards in opposite}$$

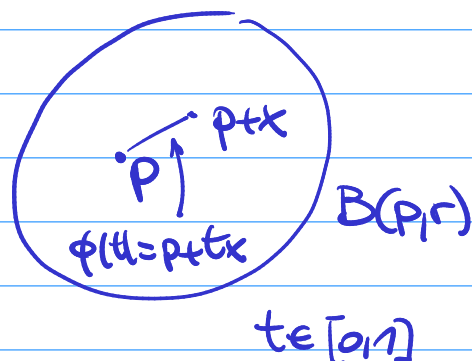
FORMULA
TAYLOR

$$f \in C^2(B(p, r), \mathbb{R})$$

$$f(\phi(t)) = h(t)$$

$$[0, 1] \xrightarrow{\phi} B(p, r) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$t \mapsto \phi(t) \mapsto f(\phi(t))$



$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{1}{2}h''(0)t^2 + o(t^2)$$

$$t=1 \quad h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2}h''(0) + R$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ f(\phi(1)) & & f(\phi(0)) = f(p) \\ = f(p+x) & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} h'(0) &= (h'(t))_{t=0} = [Jf(\phi(t)) \cdot J\phi(t)]_{t=0} = [Df(\phi(t)) \cdot \phi'(t)]_{t=0} \\ &= Df(\phi(0)) \cdot \phi'(0) = Df(p) \cdot x \end{aligned}$$

$$H''(a) = [H''(t)]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} \left(\nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \right) \right]_{t=0}$$

$\uparrow$
 $H'(t)$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(\partial_1 f(\phi(t)) \phi'_1(t) + \dots + \partial_n f(\phi(t)) \phi'_n(t) \right) \right]_{t=0}$$

$$= \left[\left(\nabla(\partial_1 f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)) \phi'_1(t) + \dots + \nabla(\partial_n f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)) \phi'_n(t) \right) \right. \\ \left. + (\partial_1 f(\phi(t)) \cdot \phi''_1(t) + \dots + \partial_n f(\phi(t)) \cdot \phi''_n(t)) \right]_{t=0}$$

$$= [Hf(\phi(t)) \phi'(t) + \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi''(t)]_{t=0}$$

$$\left[\begin{aligned} &= [\partial_1 f(\phi(t)) \phi'_1(t) + \partial_2 f(\phi(t)) \phi'_2(t) + \dots + \partial_n f(\phi(t)) \phi'_n(t)] \phi'_1(t) \\ &+ [\partial_1 f(\phi(t)) \phi'_1(t) + \dots + \partial_n f(\phi(t)) \phi'_n(t)] \cdot \phi'_2(t) \\ &+ \dots + [\partial_1 f(\phi(t)) \phi'_1(t) + \dots + \partial_n f(\phi(t)) \phi'_n(t)] \cdot \phi'_n(t) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f(\phi(t)) \phi'_i(t) \phi'_j(t) = [Hf(\phi(t)) \phi'(t)] \cdot \phi'(t) \end{aligned} \right]$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} [Hf(p)x] \cdot x + o \quad (\phi''(t) = 0 \quad \forall t)$$

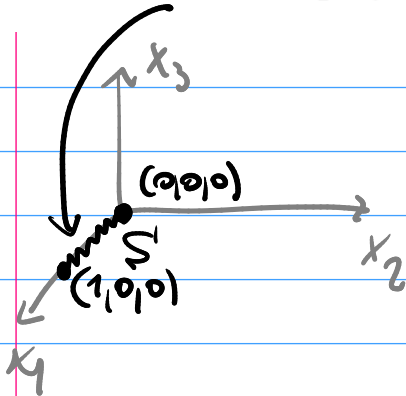
$t=0$

$$\Rightarrow f(p+x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot x + \frac{1}{2} (Hf(p)x) \cdot x + R$$

$$R = o(\|x\|_2^2)$$

28/10/2025

ESERCIZIO 9. $\{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_3 = 0\}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2$ è chiuso.



① $\{x_i \geq c\}$ è chiuso (perché $f(x) = x_i$ è continua e $\{x_i \geq c\} = f^{-1}([c, +\infty))$ chiuso)

$S = \{x_1 \geq 0\} \cap \{x_1 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq 0\} \cap \{x_2 \leq 0\} \cap \{x_3 \geq 0\} \cap \{x_3 \leq 0\}$
 $\Rightarrow S$ è chiuso perché intersezione di chiusi

② $\{x_k\} \in S$ convergente $x_k \rightarrow \bar{x} \in S$

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}) = (x_{k1}, 0, 0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\bar{x}_1, 0, 0) = \bar{x}$$

$$x_k \in S \Rightarrow 0 \leq x_{k1} \leq 1 \rightarrow 0 \leq \bar{x}_1 \leq 1$$

$$S \text{ è compatto infatti: } \forall x \in S \quad \|x\|_2 = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2} = [x_1^2]^{1/2} = |x_1| \leq 1$$

$$\Rightarrow S \subseteq B(0, 2) \text{ cioè è limitato.}$$

ESERCIZIO 22. La funzione $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$, è continua

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{matrix} x \\ (x_1, x_2) \end{matrix} \rightarrow h(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix}$$

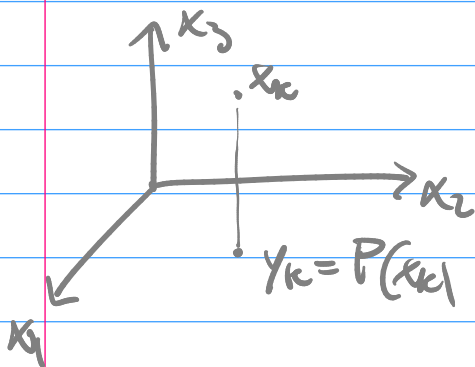
$$\begin{matrix} x_k \rightarrow x_0 \\ \uparrow \\ (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h(x_k) \rightarrow h(x_0) \\ \uparrow \\ (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \end{matrix}$$

ESERCIZIO 6. Sia $\{p_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^3$, allora la successione $\{(x_{1,k}, x_{2,k})\}$ è convergente in $\mathbb{R}^2$.

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^3 \text{ è completo}}} \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3 \quad x_{ki} \rightarrow \bar{x}_i \quad i=1,2,3$$

$$y_k = (x_{k1}, x_{k2}) \quad x_{k1} \rightarrow \bar{x}_1, \quad x_{k2} \rightarrow \bar{x}_2$$

$$F(x_k) = y_k \xrightarrow{(x_{k1}, x_{k2})} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{y} = P(\bar{x})$$



$$(\mathbb{R}^2 \cong \{x_3 = 0\})$$

OSS. $\gamma: \{r = r(\theta) \mid \theta \in [a, b]\}$

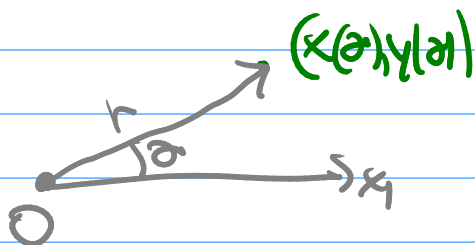
$$L(\gamma) = \int_a^b \|v(t)\|_2 dt = \int_a^b \left[r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(\theta) = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta) \\ y'(\theta) = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

velocità
radiale

velocità
tangenziale



$$\begin{aligned} \|v(t)\|_2^2 &= \|(x'(\theta), y'(\theta))\|_2^2 = [r'(\theta)^2 \cos^2(\theta) + r^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2r(\theta)r'(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &\quad + r'(\theta)^2 \sin^2(\theta) + r^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2r(\theta)r'(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)] \\ &= r'(\theta)^2 + r(\theta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

ESERCIZIO 11. L'insieme $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ è chiuso.

considero $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, il nostro insieme è

$f^{-1}([0, 1])$, siccome f è continuo (è un polinomio!)

$\Rightarrow \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} = \overline{B(0, 1)} \subseteq \mathbb{R}^3$ è chiuso

$\in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, 1]) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) \in [0, 1]\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di legge $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3)$, dove ϕ è una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$:

- si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
- si dica per quali ϕ la funzione f è armonica in $\mathbb{R}^3$,
- tra le precedenti si identifichino le funzioni ϕ tali che $f(0) = 0$.

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3) \quad \phi \in C^2(\mathbb{R})$$

$$1. \partial_1 f(x) = 2x_1, \quad \partial_2 f(x) = -2x_2, \quad \partial_3 f(x) = \phi'(x_3)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ e sono continue } \partial_i f \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ per il Teor. differenziale totale f è differenziabile in tutto lo spazio.

$$\left[\begin{array}{l} \Delta f(x) = \text{Tr}(\text{H}f(x)) = \partial_{11}f(x) + \partial_{22}f(x) + \partial_{33}f(x) = 0 \\ \uparrow \text{operatore di Laplace o laplaciano} \\ \Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \end{array} \right]$$

$$\Delta f(x) = \partial_{11}(x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3)) + \partial_{22}(x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3))$$

$$+ \partial_{33}(x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3)) = \cancel{2} - \cancel{2} + \phi''(x_3) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \phi \in C^2(\mathbb{R}) ; \phi''(x_3) = 0 ?$$

$$\phi''(x_3) = 0 \Rightarrow \phi'(x_3) = \phi'(0) + \int_0^{x_3} \phi''(s) ds = \phi'(0)$$

$$\Rightarrow \phi(x_3) = \phi(0) + \int_0^{x_3} \phi'(s) ds = \phi(0) + \phi'(0)x_3$$

$$\Rightarrow f \text{ è armonica se } \phi(x_3) = mx_3 + q ; m, q \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = (x_1^2 - x_2^2 + mx_3 + q)_{x=0} = q = 0$$

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + mx_3, m \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). Data la funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \quad A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il suo dominio,

ii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in $(p, f(p)) \in A \times \mathbb{R}$,

iii. si verifichi che la funzione f è armonica in A .

$$1. \quad \gamma f(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{e} \quad \partial_2 f(x) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$$

poiché $C^\infty \subseteq C^0$ allora f è differenziabile per il Teorema del differenziale totale

[$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ , $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x) = x_1^2 + x_2^2 \in C^\infty$
 $\Rightarrow$ la loro composizione è $C^\infty(A, \mathbb{R}) \subseteq C^1(A, \mathbb{R})$
 $\Rightarrow C^1(A, \mathbb{R})$ (implica differenziabile in A)]

II. piano tangente $\mathcal{P}: \{x_3 = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)\}$, $p \in A$

$$x_3 = \frac{1}{2} \ln(p_1^2 + p_2^2) + \frac{(p_1, p_2)}{p_1^2 + p_2^2} \cdot (x_1 - p_1, x_2 - p_2)$$

$$\mathcal{P}: \{x_3 = \frac{1}{2} \ln(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{p_1^2 + p_2^2} (p_1 x_1 + p_2 x_2) - 1\}$$

III. $\Delta f(x) = \partial_1 f(x) + \partial_2 f(x)$

$$\partial_1 f(x) = \partial_1 \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\partial_2 f(x) = \partial_2 \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = -\partial_1 f(x)$$

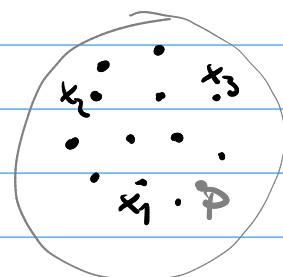
ESEMPIO. $D = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^m$

c'è $p \in \mathbb{R}^m$ che "meglio" rappresenta D ?

$$F(p) = \sum_{i=1}^N \|p - x_i\|_2^2$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^m |p_j - x_{ij}|^2 \right], \text{ con } \mathbb{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione è una somma di quadrati, mi aspetto che abbia un punto di minimo assoluto



$$\partial_k F(p) = - \sum_{i=1}^N 2(x_{i,k} - p_k) = -2 \left[\sum_{i=1}^N x_{i,k} - N p_k \right] = 0$$

$$\Rightarrow \bar{p}_k = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_{i,k} \right] = m(x_k) = \bar{x}_k$$

↑ media delle componenti k
del campione!

POLINOMIO
DI TAYLOR
(2° ORDINE)

$$f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

polinomio del primo ordine
(con resto di Peano)

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + R_1(x, x_0)$$

$\underset{O(\|x - x_0\|_2)}{\parallel}$

consideriamo il segmento Tra x e x_0 come una curva
regolare di parametrizzazione $(\phi, [a, 1]) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \phi(t) = x_0 + t(x - x_0) \\ \text{con } t \in [0, 1] \end{array} \right]$

$h(t) := f(\phi(t)) \in C^2([a, 1])$, Taylor per h (con resto in forma di Lagrange) è

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{1}{2}h''(\xi)t^2$$

notiamo che

$$\begin{aligned} h'(0) &= \frac{d}{dt} (f(\phi(t))) \Big|_{t=0} = \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \Big|_{t=0} = \nabla f(\phi(0)) \cdot \phi'(0) \\ &= \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= \frac{d}{dt} (\nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)) \Big|_{t=\xi} = \frac{d}{dt} (\nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) + \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi''(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (a_i f(\phi(t))) \phi'_i(t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} f(\phi(t)) \phi'_j(t) \phi'_i(t) \\ &= \left[\nabla f(\phi(t)) \phi'(t) \right] \cdot \phi'(t) \Big|_{t=\xi} = \left[\nabla f(\phi(\xi)) \phi'(\xi) \right] \cdot \phi'(\xi) \end{aligned}$$

questo calcolo ci permette di fare due cose interessanti:

① Taylor al 1° ordine con resto di Lagrange: sviluppo di f

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} [Hf(p)(x - x_0)] \cdot (x - x_0)$$

dove $p = \phi(\xi)$ è un punto che si trova sul segmento tra x_0 e x

Il calcolo fatto suggerisce anche l'espressione del polinomio di Taylor del 2° ordine

$$T_2(f, x, x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} [Hf(x_0)(x - x_0)] \cdot (x - x_0)$$

Per stimare l'errore della precedente espressione, cioè $f(x) - T_2(f, x, x_0)$, possiamo stimare la seguente differenza

$$\frac{1}{2} [Hf(p)(x - x_0)] \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} [Hf(x_0)(x - x_0)] \cdot (x - x_0) = R_2(f, x, x_0)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 [Hf(p) - Hf(x_0)] W \cdot W \right\} \|x - x_0\|_2^2 = [A(p, x_0) W] \cdot W \quad \text{dove } W = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_2}$$

Notiamo che $x [A(p, x_0) W] \cdot W \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

otteniamo $R_2(f, x, x_0) = o(\|x - x_0\|_2^2)$, come ci aspettiamo

$$\text{Però } A(p, x_0) = \frac{1}{2} [Hf(p) - Hf(x_0)] = \frac{1}{2} \left(\partial_i \partial_j f(p) - \partial_i \partial_j f(x_0) \right)_{ij=1, \dots, n}$$

e tutte le entrate della matrice tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$ perché $f \in C^2$ (e quindi $\partial_i \partial_j f \in C^0$) e $p \rightarrow x_0$, visto che si trova sul segmento di estremi x e x_0 . Quindi abbiamo la formula di Taylor al secondo ordine

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} [Hf(x_0)(x - x_0)] \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|_2^2)$$

OSS. Se p è un punto critico di $f \in C^2(B(p, \epsilon))$ allora vale

$$f(x) = f(p) + \cancel{Df(p) \cdot (x-p)} + \frac{1}{2} [Hf(p)(x-p)] \cdot (x-p) + o(\|x-p\|^2)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(p) = \frac{1}{2} [Hf(p)(x-p)] \cdot (x-p) + o(\|x-p\|^2)$$

Quindi la matrice Hessiana può aiutare nella classificazione dei punti critici della funzione. Precisamente valgono i seguenti risultati

TEOR. $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , $p \in A$ punto critico (cioè $Df(p)=0$)

allora:

i. se p è un punto di massimo locale allora $Hf(p)$ è semidefinita negativa,

ii. se p è un punto di minimo locale allora $Hf(p)$ è semidefinita positiva.

TEOR. $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , $p \in A$ punto critico (cioè $Df(p)=0$)

allora:

i. $Hf(p)$ definita positiva $\Rightarrow p$ punto di minimo (locale),

ii. $Hf(p)$ definita negativa $\Rightarrow p$ punto di massimo (locale),

iii. $Hf(p)$ non definita $\Rightarrow p$ punto di sella.

OSS. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice quadrata simmetrica, allora

i. M definita positiva, cioè $Mw \cdot w > 0 \ \forall w \neq 0$, se $\lambda_i > 0 \ \forall i=1, \dots, n$,

ii. M definita negativa, cioè $Mw \cdot w < 0 \ \forall w \neq 0$, se $\lambda_i < 0 \ \forall i=1, \dots, n$,

iii. M non definita se $\exists \lambda_i, \lambda_j$ tali che $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

Se $n \geq 3$ può essere difficile capire se $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è definita o meno, può essere utile ricordare il seguente criterio

TEOREMA 2.25 (test di Sylvester). Indichiamo con $H^{(k)}$ il minore principale di ordine $k \leq n$ estratto da $H_f(\mathbf{p})$, composto dalle prime k righe e k colonne. Allora

- i. $H_f(\mathbf{p})$ è definita positiva se e solo se $\det H^{(k)} > 0$, $k = 1, \dots, n$,
- ii. $H_f(\mathbf{p})$ è definita negativa se e solo se $(-1)^k \det H^{(k)} > 0$, $k = 1, \dots, n$,
- iii. $H_f(\mathbf{p})$ è indefinita se ha un minore principale di ordine pari con determinante negativo oppure ha due diversi minori principali di ordine dispari che sono discordi.