

24/09/2018 aula E

Fattorizzazione LU: CNES esistenza e unicità; tre CS esistenza e unicità - che evitano la strategia del pivoting. Fattorizzazione LL^H : CNES esistenza e unicità. Fattorizzazione QR: esistenza. Costi fattorizzazioni. Implementazione in MATLAB (lu, chol, qr).

26/09/2018 aula IV

Sistemi triangolari: algoritmi e codici **forward** e **backward**. Costo. Matrici triangolari a banda e codici **forwband** e **backband**. Costi. Metodo di Gauss e algoritmo LU senza strategia pivoting (codice **basicLU**).

28/09/2018 aula IV

Il caso delle matrici bandate: fattorizzazione LU, proprietà e costi (codice **luband**). Fattorizzazione incompleta e codice **basicILU**. Cenni su stabilità e stabilità in senso debole. Fattorizzazione di Cholesky e codice **basicCHOL**; stabilità.

01/10/2018 aula E

Fattorizzazione incompleta e codice **basicICHOL**. Richiami sulle norme di matrici (norme indotte da norme vettoriali e norme consistenti con norme vettoriali). Richiami sul raggio spettrale e proprietà. Richiami sul condizionamento di una matrice e proprietà (riguardanti la distanza dalle matrici singolari e maggiorazioni dell'errore relativo). Matrici a blocchi e CNES per fattorizzazione LU a blocchi. Matrici tridiagonali a blocchi e condizione sufficiente per la fattorizzazione LU a blocchi. Algoritmo di Thomas a blocchi.

03/10/2018 aula IV

Problema ai minimi quadrati. Equazioni normali. Matrice pseudo-inversa. Fattorizzazione QR. Riflettori elementari di Householder. Algoritmo per la fattorizzazione QR. Fattorizzazione QR ridotta.

05/10/2018 aula IV

Soluzione del problema dei minimi quadrati con matrice A di rango massimo. Codice **basicQR**. Decomposizione ai valori singolari. Teorema di esistenza (con dimostrazione).

08/10/2018 Laboratorio 1

Foglio 1

10/10/2018 aula IV

SVD ridotta. Proprietà (con dimostrazione) relative al nucleo, all'immagine e al rango di una matrice. Valori singolari e norma (spettrale e di Frobenius) di una matrice. Valori singolari e condizionamento spettrale di una matrice.

12/10/2018 aula IV

Norma spettrale di una matrice normale. Condizionamento di una matrice normale e invertibile. Determinazione del rango di una matrice. Approssimazione di rango basso. Problema ai minimi quadrati con SVD (prima parte).

15/10/2018 aula E

Problema ai minimi quadrati con SVD (seconda parte). Matrice pseudo-inversa di una matrice rettangolare non di rango massimo. Condizionamento spettrale di matrici rettangolari di rango massimo. Condizionamento spettrale generalizzato di matrici rettangolari. Effettivo calcolo della SVD (cenni). Metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari. CNES di convergenza per ogni approssimazione iniziale di un metodo iterativo consistente in base al raggio spettrale della matrice di iterazione.

17/10/2018 aula IV

Stabilità di un metodo iterativo. Tasso asintotico di convergenza. Richiami sui metodi di Jacobi e SOR. Risultati di convergenza per il metodo SOR con valore ottimale per matrice hermitiana definita positiva e tridiagonale. Convergenza monotona nella norma dell'energia. Norma matriciale indotta dalla norma dell'energia. Criterio di arresto del residuo normalizzato in norma euclidea (e in norma dell'energia) e relazioni con il condizionamento del sistema. Matrici a blocchi. Metodi di Jacobi e SOR a blocchi. Risultati di convergenza per il metodo SOR a blocchi con valore ottimale per matrice tridiagonale a blocchi.

19/10/2018 aula IV

Definizione di M-matrice e condizioni sufficienti riguardanti la dominanza diagonale e la proprietà di avere il grafo di adiacenza associato fortemente connesso. Risultati di convergenza per il metodo SOR a blocchi con valore ottimale per M-matrici tridiagonali a blocchi. Trattamento di sistemi con la matrice di Poisson come matrice dei coefficienti. Proprietà relative alla A-norma e al raggio spettrale. Considerazioni sul condizionamento in A-norma. Metodo di Richardson stazionario. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.

22/10/2018 aula E

Parametro ottimale per il metodo di Richardson stazionario. Analisi della convergenza del metodo di Richardson con parametro ottimale applicato ad un sistema con matrice dei coefficienti hermitiana definita positiva. Monotonia della convergenza rispetto alla A-norma. Maggiorazione della A-norma dell'errore in funzione del numero di condizionamento spettrale del sistema preconditionato. Tecniche di preconditionamento nella soluzione di sistemi lineari e fattorizzazioni incomplete. Metodo di Richardson a parametro dinamico. Metodi del gradiente. Direzioni di decrescita. Calcolo del passo.

24/10/2018 aula IV

Calcolo del k-esimo passo e equivalenza con la minimizzazione della A-norma dell'errore lungo la k-esima direzione. Metodo del gradiente steepest descent (SD). Ortogonalità delle direzioni successive di discesa. Maggiorazione dell'errore nella norma dell'energia. Metodo del gradiente coniugato (CG). Algoritmo e doppia formulazione di beta. Ortogonalità dei residui e A-ortogonalità delle direzioni di discesa. Convergenza al più in n passi. CG con restart.

26/10/2018 aula IV

Dimostrazione dell'ortogonalità dei residui e dell'A-ortogonalità delle direzioni di discesa in CG. Maggiorazione dell'errore nella norma dell'energia. Metodi del gradiente preconditionati. Metodo del gradiente SD preconditionato. Metodo del gradiente preconditionato con doppia formulazione di beta. Commenti sui codici **richardson**, **steepdes**, **basicPCG**. Metodo del gradiente coniugato applicato alle equazioni normali (CGN) per la soluzione di un sistema con matrice dei coefficienti non simmetrica definita positiva. Introduzione ai metodi basati su sottospazi di Krylov.

31/10/2018 aula IV

Sottospazi di Krylov. Metodi di Krylov. Iterazione di Arnoldi. Sistemi lineari e metodo GMRES. Algoritmo GMRES. Convergenza al più in n passi. Precondizionamento. Strategia del restart. Metodo CG come metodo di Krylov. Metodo CGN come metodo di Krylov.

12/11/2018 Laboratorio 1

Foglio 2

13/11/2018 aula G

Confronto tra metodi di Krylov per l'approssimazione della soluzione di un sistema lineare. Metodi di Krylov per l'approssimazione di autovalori di matrici sparse e di grandi dimensioni. Proiezione in uno spazio di Krylov e parziale riduzione in forma di Hessenberg superiore. Metodo di Arnoldi. Codici **GSarnoldi**, **basicGMRES**, **arnoldialg**. Iterazione di Lanczos per matrice reale e simmetrica. Proiezione di una matrice reale e simmetrica in uno spazio di Krylov e parziale riduzione in forma tridiagonale simmetrica. Metodo di Lanczos. Codici **GSlanczos**, **lanczosalg**. Problema agli autovalori di matrici diagonalizzabili (di dimensioni non troppo grandi). Stabilità degli algoritmi e operazioni di similitudine unitaria.

14/11/2018 aula IV

Condizionamento del problema agli autovalori. Teorema della decomposizione di Schur (con dimostrazione). Caratterizzazione delle matrici normali come matrici unitariamente diagonalizzabili (con dimostrazione). Metodo QR di Francis. Prima variante e trasformazione in forma di Hessenberg superiore.

16/11/2018 aula IV

Metodo di Householder per la riduzione in forma di Hessenberg superiore. Caso delle matrici hermitiane. Codice **houshess**. Confronti tra l'algoritmo di Householder e l'iterazione di Arnoldi e tra l'algoritmo di Householder e l'iterazione di Lanczos (sfruttamento sparsità e conservazione simmetria). Seconda variante e tecnica dello shift. Codice **qrshift**. Problema di Cauchy. Introduzione ai metodi numerici (multistep lineari) per la soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

19/11/2018 Laboratorio 1

Foglio 3

21/11/2018 aula IV

Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine ai valori iniziali. Sistemi di ODE lineari a coefficienti costanti. Problema modello. Schemi numerici e regione di assoluta stabilità. Problemi stiff e quoziente di stiffness. Schemi A-stabili. Schemi lineari ad un passo (Eulero, Eulero implicito, Crank Nicolson). Iterazioni di punto fisso e metodo di Newton per risolvere ad ogni passo le equazioni vettoriali non lineari che compaiono negli schemi impliciti.

23/11/2018 aula IV

Metodi multistep lineari a $p+1$ passi. Errore di troncamento locale (LTE). Definizione di consistenza. Metodo di ordine q . Errore di troncamento locale principale (PLTE). Definizioni di zero-stabilità e convergenza. Il metodo del punto medio. Il metodo di Simpson. I metodi di Adams. Metodi di Adams Bashforth: algoritmo e prestazioni. Costruzione schemi AB1 e AB2. Metodi di Adams Moulton: algoritmo e prestazioni. Costruzione schemi AM1 e AM2. Formula dello schema AM3. Cenni sul codice **multistep**.

26/11/2018 aula E

Metodi BDF: algoritmo e prestazioni. Costruzione schema BDF1. Formula dello schema BDF2. Equazioni alle differenze omogenee a coefficienti costanti: polinomio caratteristico, soluzioni fondamentali e formula generale per le soluzioni della equazione alle differenze considerata. Analisi dei metodi multistep. Formule per la consistenza. Primo e secondo polinomio caratteristico associato ad uno schema a più passi. Radici caratteristiche e radice principale associata alla radice di consistenza. Condizione delle radici e condizione assoluta delle radici. Zero-stabilità e condizione delle radici.

28/11/2018 aula IV

Convergenza e teorema di equivalenza. Prima barriera di Dahlquist. Assoluta stabilità e condizione assoluta delle radici. Theta-stabilità. Seconda barriera di Dahlquist. Regioni di assoluta stabilità dei metodi studiati. Codice **multistep**.

30/11/2018 aula IV

Metodi predictor corrector: polinomio caratteristico, ordine, assoluta stabilità. Metodi Runge Kutta a 2 e 4 stadi per innescare i metodi multistep. Codici **AB2AM3**, **RungeKutta4**, **Heun**.

03/12/2018 Laboratorio 1

Foglio 4

05/12/2018 aula IV

Approssimazione di problemi ai limiti. Problema modello. Il metodo delle differenze finite. Principio del massimo discreto (ovvero monotonia). Stabilità (ovvero soluzione limitata dal dato). Consistenza. Convergenza. Esempi. Codice **testLimiti**. Tecniche di approssimazione in due dimensioni basate su differenze finite.

07/12/2018 aula IV

Equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee. Schemi alle differenze finite. Metodi a 5 e 9 punti. Analisi della convergenza con lo schema a 5 punti. Visualizzazione della soluzione numerica in MATLAB.

10/12/2018 aula E

Esempi. Codice **testPoisson**. Problema ai valori iniziali e ai limiti di tipo parabolico. Equazione del calore. Approssimazione con metodi alle differenze finite della soluzione del problema. Semidiscretizzazione del problema. Indice di stiffness del sistema di equazioni differenziali ordinarie a cui si riduce il problema. Definizione di metodo (condizionatamente) asintoticamente stabile. Schema di Eulero in avanti. Schema di di Eulero all'indietro.

12/12/2018 aula IV

Theta-metodo per l'approssimazione della soluzione dell'equazione del calore. Analisi dell'errore globale di troncamento e della asintotica stabilità al variare di theta in $[0,1]$. Esempi. Codice **testCalore**. Problema di trasporto scalare. Direzione caratteristica. Assegnazione del valore al contorno in inflow. Sistemi strettamente iperbolici lineari. Dominio di dipendenza. Assegnazione dei valori al contorno in inflow.

14/12/2018 aula IV

Equazione delle onde e equivalenza con un sistema di due equazioni di trasporto (non omogenee) accoppiate. Formula di D'alambert. Schema leap-frog a due passi. Condizione iniziale e condizione di innesco. Consistenza al secondo ordine in spazio e in tempo. Cenni su stabilità e dipendenza numerica dello schema. Codice **leapfrog**. Discretizzazione dell'equazione del trasporto. Schemi di tipo esplicito: Eulero in avanti/centrato, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff.

17/12/2018 Laboratorio 1

Foglio 5

18/12/2018 aula G

Discretizzazione dell'equazione del trasporto. Schema upwind (di tipo esplicito). Schema di Eulero all'indietro/centrato (di tipo implicito). Analisi dei metodi alle differenze finite. Consistenza. Ordine di consistenza in spazio e in tempo degli schemi considerati. Esempio dello schema Eulero in avanti/centrato. Schemi **euleroAV**, **laxfriedrichs**, **laxwendroff**, **upwind**, **euleroind**. Cenni sulla stabilità di uno schema in una norma discreta. Esempio dello schema upwind nella norma 1 discreta.

19/12/2018 aula IV

Definizione di stabilità e forte stabilità. Condizioni per la stabilità degli schemi considerati. Condizione CFL. Dominio di dipendenza numerica. Convergenza e teorema di Lax-Richtmyer. Cenni sulla analisi di stabilità alla Von Neumann rispetto alla norma 2 discreta e sui fenomeni di dissipazione e dispersione.

21/12/2018 Laboratorio 2

Foglio 6