

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - 7 LUGLIO 2018

| | |
|----------------|-------|
| Cognome e nome | Matr. |
|----------------|-------|

REGOLE D'ESAME

- 1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!
- 2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

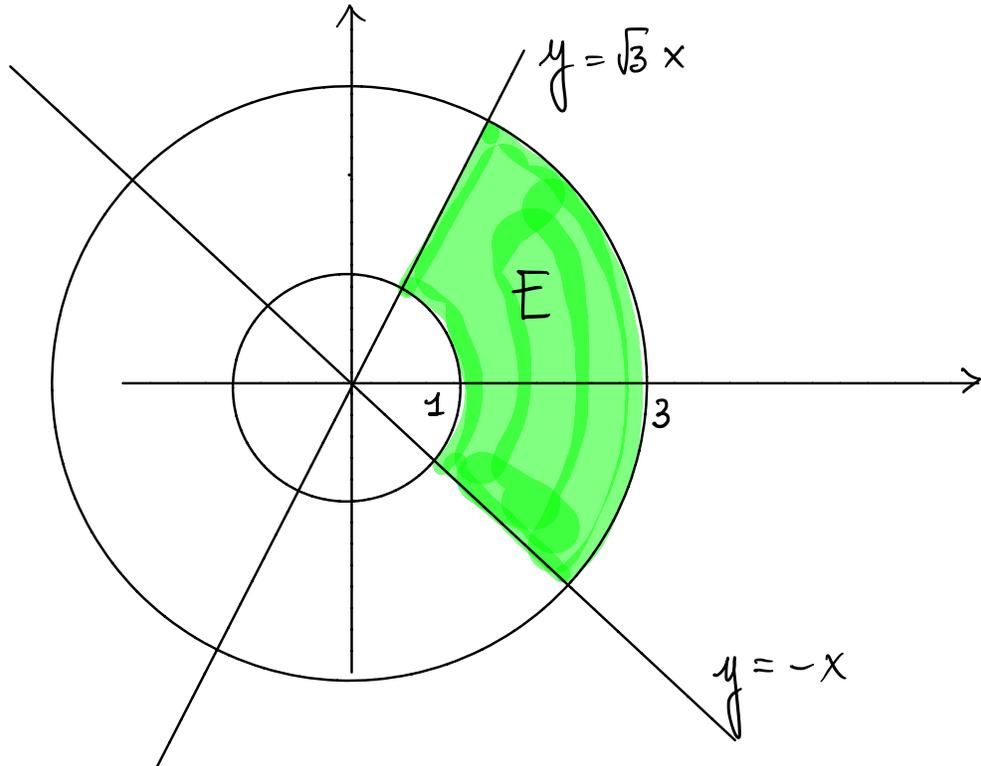
◇ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = -4t + 6 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{2t} + t^2 - 2t + 1.$$

◇ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
 Usando coordinate polari, calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{y}{x^3} dx dy, \quad \text{dove } E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, -x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$



$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \left(\int_1^3 \frac{\rho \sin\theta}{\rho^3 \cos^3\theta} \rho \right) = \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \right) \left(\int_1^3 \frac{d\rho}{\rho} \right) = 4 \ln 3$$

" [sost. $\cos\theta = t$]
"

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1/2} \frac{dt}{t^3} = \frac{2}{t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1/2} = 4$$

◇ - Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, -1 a quelle sbagliate

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Risposta:

A il rango di A è 1

B il rango di A è 2

C il rango di A è 3

D il rango di A è 4

E il rango di A non è definito perché A non è una matrice quadrata

Esercizio 4. La funzione $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^3$ ammette come punto critico l'origine. Un altro punto critico è:

Risposta:

A $(-2, 0)$

B $(2, 0)$

C $(1, 0)$

D $(-1, 0)$

E nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. La lunghezza della curva $\gamma(t) = (\sqrt{2}t^2, \sqrt{2}t^2)$, $t \in [0, 1]$, vale:

Risposta: A 4

B 3

C 1

D 2

E nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y - 1, x^4)$$

per spostare una particella dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$ vale:

Risposta:

A 2

B dipende dal percorso seguito

C 0

D -2

E nessuna delle altre risposte

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - 7 LUGLIO 2018

| | |
|----------------|-------|
| Cognome e nome | Matr. |
|----------------|-------|

REGOLE D'ESAME

- 1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!
- 2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

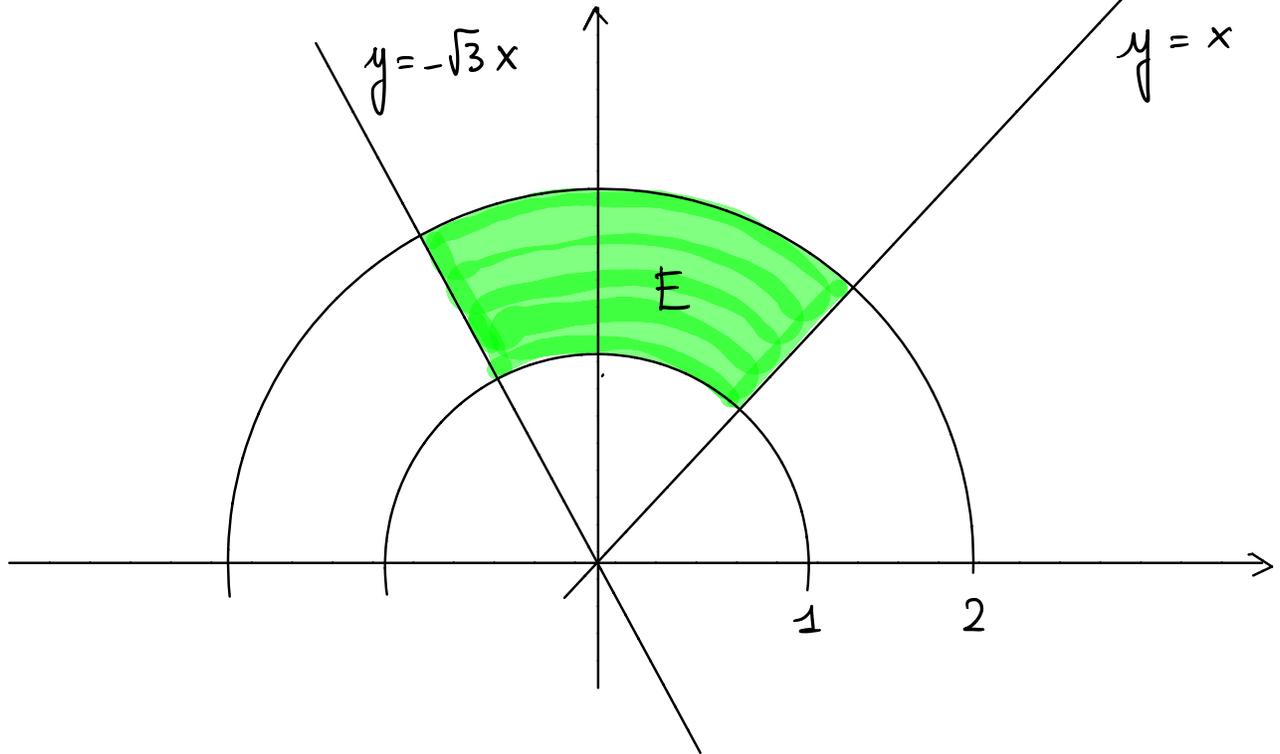
♣ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) = 9 - 9t \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{3t} + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 1$$

♣ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
 Usando coordinate polari, calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{x}{y^3} dx dy, \quad \text{dove } E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{3}x, y \geq x\}.$$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \left(\int_1^2 dp \frac{\rho \cos \theta}{\rho^3 \sin^3 \theta} \rho \right) = \underbrace{\left(\int_1^2 \frac{dp}{p} \right)}_{\ln 2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta \right)}_{\text{|| [sost. } t = \sin \theta]} = \frac{4}{3} \ln 2$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^3} = -\frac{2}{t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}$$

♣ - Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, -1 a quelle sbagliate

Esercizio 3. Data

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & -8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

Risposta:

A il rango di A è 1

B il rango di A è 2

C il rango di A è 3

D il rango di A è 4

E il rango di A non è definito perché A non è una matrice quadrata

Esercizio 4. La funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2$ ammette come punto critico l'origine. Un altro punto critico è:

Risposta:

A $(0, -2)$

B $(0, 2)$

C $(0, 1)$

D $(0, -1)$

E nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. La lunghezza della curva $\gamma(t) = (t^2, t^2)$, $t \in [0, 1]$, vale:

Risposta: A 2

B $\sqrt{3}$

C $\sqrt{2}$

D $3\sqrt{3}$

E nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y - 2, x^3)$$

per spostare una particella dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$ vale:

Risposta:

A 1

B dipende dal percorso seguito

C 0

D -1

E nessuna delle altre risposte

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - 7 LUGLIO 2018

| | |
|----------------|-------|
| Cognome e nome | Matr. |
|----------------|-------|

REGOLE D'ESAME

- 1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!
- 2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

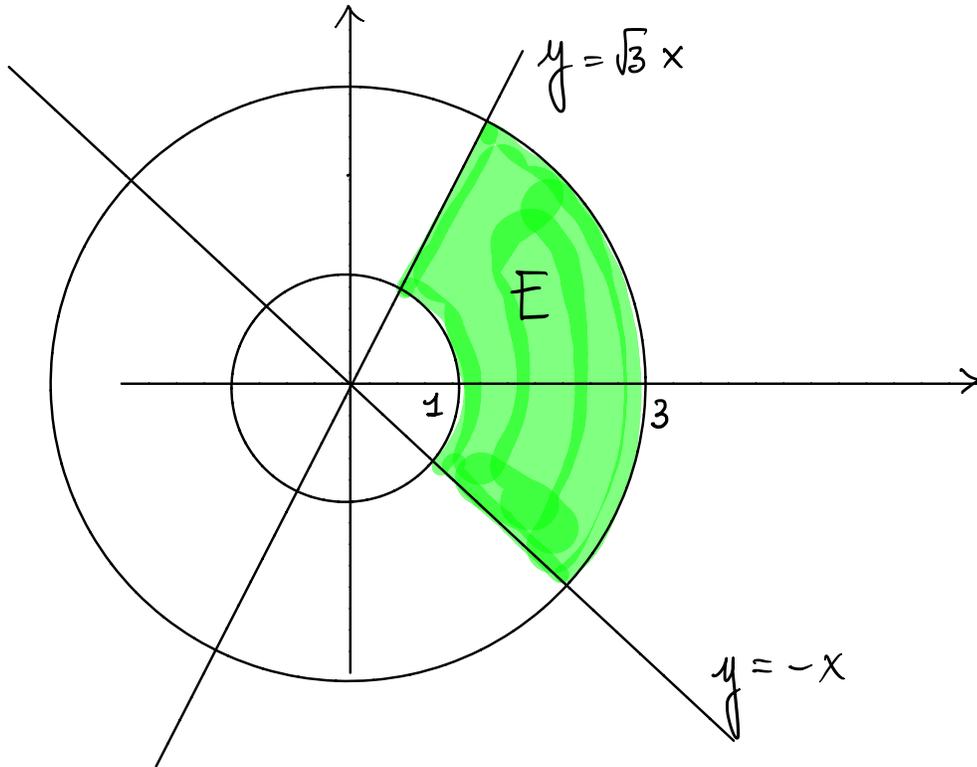
♡ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = -4t + 6 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{2t} + t^2 - 2t + 1.$$

♡ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
 Usando coordinate polari, calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{y}{x^3} dx dy, \quad \text{dove } E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, -x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$



$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \left(\int_1^3 \frac{\rho \sin\theta}{\rho^3 \cos^3\theta} \rho \right) = \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \right) \left(\int_1^3 \frac{d\rho}{\rho} \right) = 4 \ln 3$$

" [sost. $\cos\theta = t$]
"

$$- \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1/2} \frac{dt}{t^3} = \frac{2}{t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1/2} = 4$$

♡ - Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, -1 a quelle sbagliate

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 9 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta:

- A il rango di A è 1
 B il rango di A è 2
 C il rango di A è 3
 D il rango di A è 4
 E il rango di A non è definito perché A non è una matrice quadrata

Esercizio 4. La funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + y^3$ ammette come punto critico l'origine. Un altro punto critico è:

Risposta:

- A $(-1, 0)$ B $(2, 0)$ C $(1, 0)$ D $(-2, 0)$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. La lunghezza della curva $\gamma(t) = (\sqrt{2}t^2, -\sqrt{2}t^2)$, $t \in [0, 1]$, vale:

- Risposta:** A 4 B 3 C 1 D 2 E nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y - 1, x^4)$$

per spostare una particella dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 2)$ vale:

Risposta:

- A 1 B dipende dal percorso seguito C -1 D 0 E nessuna delle altre risposte

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - 7 LUGLIO 2018

| | |
|----------------|-------|
| Cognome e nome | Matr. |
|----------------|-------|

REGOLE D'ESAME

- 1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!
- 2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

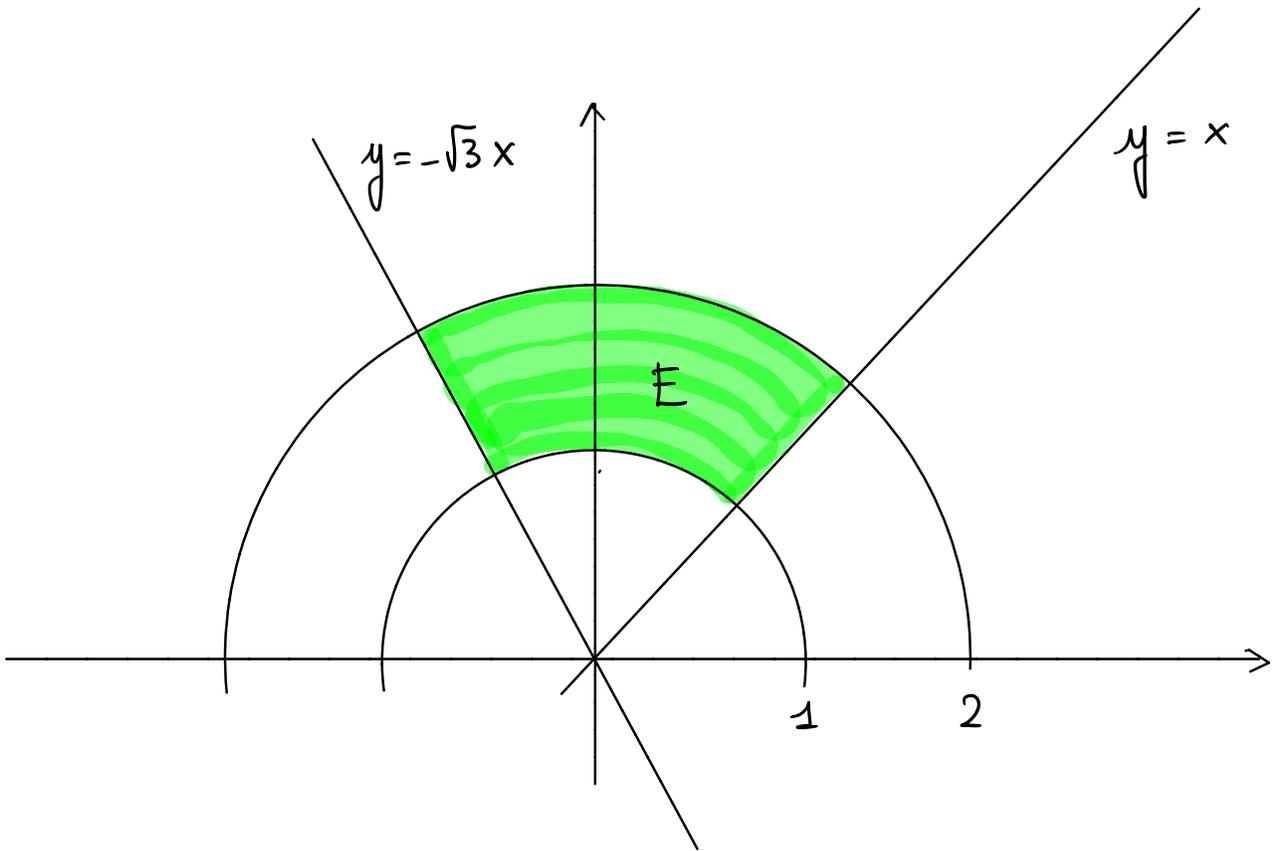
♠ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) = 9 - 9t \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{3t} + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 1$$

♠ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
 Usando coordinate polari, calcolare l'integrale

$$\iint_E \frac{x}{y^3} dx dy, \quad \text{dove } E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{3}x, y \geq x\}.$$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \left(\int_1^2 \frac{\rho \cos \theta}{\rho^3 \sin^3 \theta} \rho \right) = \underbrace{\left(\int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} \right)}_{\ln 2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta \right)}_{\text{|| [sost. } t = \sin \theta]} = \frac{4}{3} \ln 2$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^3} = -\frac{2}{t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}$$

♠ - Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, -1 a quelle sbagliate

Esercizio 3. Data

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 \\ 4 & -8 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

Risposta:

- A il rango di A è 1
 B il rango di A è 2
 C il rango di A è 3
 D il rango di A è 4
 E il rango di A non è definito perché A non è una matrice quadrata

Esercizio 4. La funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3y^2$ ammette come punto critico l'origine. Un altro punto critico è:

Risposta:

- A $(0, 2)$ B $(0, -2)$ C $(0, 1)$ D $(0, -1)$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. La lunghezza della curva $\gamma(t) = (t^2, -t^2)$, $t \in [0, 1]$, vale:

Risposta: A $\sqrt{3}$ B $\sqrt{2}$ C 2 D $3\sqrt{3}$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y - 2y, x^3)$$

per spostare una particella dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$ vale:

Risposta:

- A 0 B -1 C dipende dal percorso seguito D 1 E nessuna delle altre risposte