ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
FOGLIO N. 8 DI ESERCIZI

A. Dall'Aglio, F. De Marchis

---

1. Determinare le coordinate del baricentro dell'insieme

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y^3 \le x \le \sqrt{y} \}$$

2. Disegnare l'insieme D t.c.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{2/x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

per ogni funzione continua f, e scrivere la formula per invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

Stessa cosa nei seguenti casi:

3. $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}-1}^{\ln(x+1)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

4. $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^6}^{4-x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

5. $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-e^x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

6. $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{\operatorname{arctg} x}^{4-x^6} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Disegnare i seguenti insiemi E e scrivere una formula per

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

valida per ogni funzione continua $f(x,y)$. Successivamente, invertire l'ordine di integrazione delle variabili.

7. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x \leq y \leq 3x\}$

8. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq x \leq -y^2 + 2\}$

9. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq -x^2 + 2x + 4\}$

10. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \leq x \leq 2y + 3\}$

11. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq \sqrt{|x|}$

12. $E =$ trapezio di vertici $(0,0), (2,0), (-1,3), (5,3)$

13. $E =$ triangolo di vertici $(0,0), (1,-4), (3,2)$

14. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 4, \ xy \geq 1, \ y \geq x\}$

15. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ y \geq x^3\}$

Disegnare i seguenti insiemi, che chiameremo indistintamente E, e scrivere una formula per

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

valida per ogni funzione continua f, usando un opportuno cambio di variabili.

16. $E = \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 9, \quad y \leq -\sqrt{3}\,x\}$

17. $E = \{(x,y): \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 16, \quad -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}$

18. $E = \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$

19. $E = \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x \leq \sqrt{2}\,y^2\}$

20. $E = \{(x,y): \quad x \leq x^2+y^2 \leq 4x\}$

21. $E = \{(x,y): \quad 2x \leq y \leq 2x+5, \quad -x+1 \leq y \leq -x+3\}$

22. $E = \{(x,y): \quad x-2 \leq y \leq x+1, \quad -2x+1 \leq y \leq -2x+3\}$

23. Calcolare il volume del tetraedro di vertici

$$(0,0,0),\ (2,0,0),\ (0,4,0),\ (0,0,-3)$$

24. Calcolare

$$\iint_D (1+x+y)^{-2}\, dx\, dy,$$

dove $D = \{(x,y):\ y \geq 0,\ y \leq 2\sqrt{x},\ y \geq x-1,\ y \leq 3-x\}$

25. Calcolare $\iint_E x^2\,dx\,dy$, dove

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2\le 4, \ x \ge |y|-2\}$$

26. Calcolare $\iint_D xy^2\,dx\,dy$, dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 2x \le x^2+y^2 \le 9\}$$

27. Calcolare $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, dove D è l'intersezione del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1, del cerchio di centro l'origine e raggio 1, e del semipiano $y\le x$.

28. Calcolare il baricentro del dominio

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y\ge 0, \ x^2+y^2\le 1, \ x^2+y^2\le 2x\}$$

29. Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x + y \geq 2\}$$

e calcolare il volume del solido T ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all' asse y.

Stessa cosa per i domini:

30. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x^2 + (y-1)^2 \geq 1, \ x^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$

31. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad 3y^2 \leq x^2\}$

32. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad |y| \leq 16 - x^4\}$

33. Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ x^2 \leq y^2(4 - y^2)\}$$

e calcolare il volume del solido T ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno <u>all' asse x</u>.

34. Dati i due insiemi

$$E = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0\}$$

e $$C = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 - 2y \leq 0\},$$

calcolare le coordinate del baricentro di $E \cup C$.

35. Calcolare $\iint_D (x+y)\, dx\, dy$, dove

$$D = \{(x,y) : \quad 0 \leq x \leq y \leq 2x, \quad 1 \leq xy \leq 2\}$$

+ (ovviamente) gli esercizi dati nei compiti passati.