ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - GIUGNO 2018

Cognome e nome	Matr.

REGOLE D'ESAME

1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!

2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

♢ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 - 6xy - 12x\,,$$

- trovare e classificare tutti i suoi punti critici;
- determinare tutte le direzioni $\mathbf{v}$ per cui $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,1) > 0$.

P.ti critici: $(0,-2)$ sella

$\left(2, \frac{1}{2}\right)$ minimo relativo

$\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ sella.

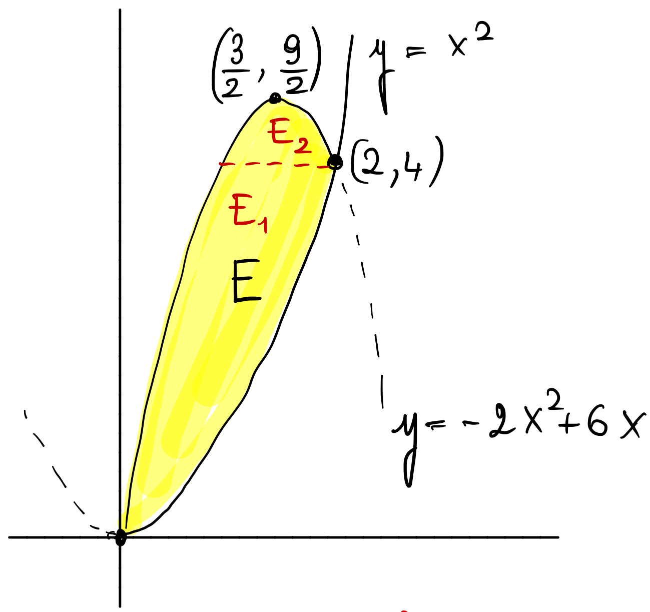
$\nabla f(0,1) = (-18, 0)$. Quindi

$\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,1) > 0$ per tutti i $\underline{v} = (v_1, v_2)$ t.c

$v_1^2 + v_2^2 = 1$, $v_1 < 0$.

♢ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.

- Disegnare l'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y \le -2x^2 + 6x\right\}$, e calcolare $\displaystyle\iint_E y\,dx\,dy$.
- Scrivere le formule di riduzione per calcolare l'integrale invertendo l'ordine di integrazione delle variabili (in questo caso non è richiesto di ricalcolare l'integrale).



$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_0^2 dx \left(\int_{x^2}^{-2x^2+6x} dy\ y \right) = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[(-2x^2+6x)^2 - x^4 \right] dx = \frac{48}{5}$$

$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_0^4 dy\ y \left(\int_{\frac{3-\sqrt{9-2y}}{2}}^{\sqrt{y}} dx \right) + \int_4^{9/2} dy\ y \left(\int_{\frac{3-\sqrt{9-2y}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-2y}}{2}} dx \right)$$

♢ - Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, −1 a quelle sbagliate

Esercizio 3. Dire per quale valore di α il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\alpha y - 1}{(x+3)^2} \, , \, \frac{x}{x+3} \right)$$

è conservativo nel semipiano $\{x > -3\}$.

Risposta:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = -1$ $\boxed{\text{B}}$ nessun valore di α $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 3$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 4. L'espressione che fornisce l'integrale curvilineo $\int_\gamma y\, ds$ lungo la curva γ di equazione $y = e^{-3x}$, $x \in [0,1]$, è data da (non si richiede di calcolare l'integrale):

Risposta: $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+9e^{-6x}}\, dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x}\sqrt{1+9e^{-6x}}\, dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+e^{-6x}}\, dx$

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x}\sqrt{1+e^{-6x}}\, dx$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. Si consideri la spirale γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t\, \cos(\pi t)\, , \\ y(t) = t\, \sin(\pi t)\, . \end{cases}$$

Il versore tangente a γ nel punto $(-1,0)$ è:

Risposta: $\boxed{\text{A}}$ $(-1,-\pi)$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{(-1,-\pi)}{\sqrt{1+\pi^2}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{(1,\pi)}{\sqrt{1+\pi^2}}$ $\boxed{\text{D}}$ $(1,\pi)$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 y$ nel punto corrispondente a $(x_0, y_0) = (1,-3)$ è:

Risposta:

$\boxed{\text{A}}$ $z = -6x + y + 6$
$\boxed{\text{B}}$ $z = 6x + y + 6$
$\boxed{\text{C}}$ $z = 1 + x - 3y$
$\boxed{\text{D}}$ $z = -3 + x - 3y$
$\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

APPELLO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - GIUGNO 2018

Cognome e nome	Matr.

REGOLE D'ESAME

1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!

2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

♣ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Data la funzione

$$f(x,y) = y^3 - 6xy + 3x^2y^2 - 3y\,,$$

- trovare e classificare tutti i suoi punti critici;
- determinare tutte le direzioni $\mathbf{v}$ per cui $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0) > 0$.

Pti critici: $(-\frac{1}{2}, 0)$ sella

$(1,1)$ punto di minimo relativo

$(-1,-1)$ sella.

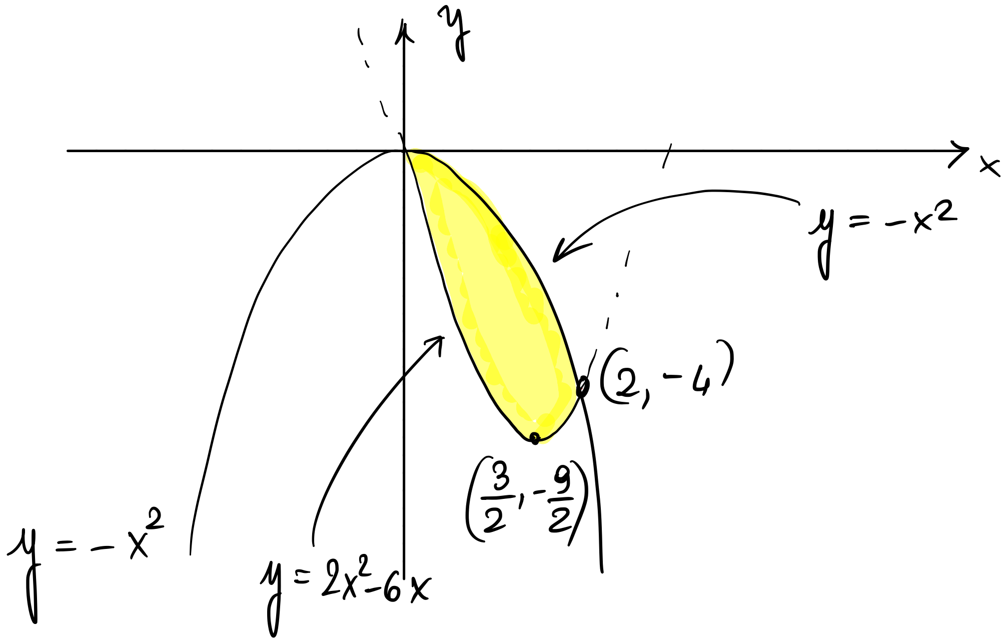
$$\nabla f(1,0) = (0,-9)$$

Quindi $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) > 0 \quad \forall\, \underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$v_1^2 + v_2^2 = 1\,, \quad v_2 < 0.$$

♣ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.

- Disegnare l'insieme $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 - 6x \leq y \leq -x^2\right\}$, e calcolare $\displaystyle\iint_E y\,dx\,dy$.
- Scrivere le formule di riduzione per calcolare l'integrale invertendo l'ordine di integrazione delle variabili (in questo caso non è richiesto di ricalcolare l'integrale).



$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_0^2 dx \left(\int_{2x^2-6x}^{-x^2} dy\ y \right) = \int_0^2 \left(x^4 - (2x^2-6x)^2\right) dx =$$

$$= -\frac{48}{5}$$

$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_{-9/2}^{-4} dy \left(\int_{\frac{3-\sqrt{9+2y}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9+2y}}{2}} dx\ y \right) + \int_{-4}^{0} dy \left(\int_{\frac{3-\sqrt{9+2y}}{2}}^{\sqrt{-y}} dx\ y \right)$$

♣ - **Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, -1 a quelle sbagliate**

Esercizio 3. Dire per quale valore di α il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\alpha y^2 - 1}{(x+3)^2}\,,\ \frac{x}{x+3} \right)$$

è conservativo nel semipiano $\{x > -3\}$.

Risposta:

A nessun valore di α B $\alpha = 3$ C $\alpha = 1$ D $\alpha = -1$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 4. L'espressione che fornisce l'integrale curvilineo $\int_\gamma y\,ds$ lungo la curva γ di equazione $y = e^{3x}$, $x \in [0,2]$, è data da (non si richiede di calcolare l'integrale):

Risposta: A $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+e^{6x}}\,dx$ B $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+9e^{6x}}\,dx$ C $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\sqrt{1+9e^{6x}}\,dx$

D $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\sqrt{1+e^{6x}}\,dx$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^3\,, \\ y(t) = t\,e^{2t}\,. \end{cases}$$

Il versore tangente a γ nel punto $(0,0)$ è:

Risposta: A $\dfrac{(1,2e)}{\sqrt{1+4e^2}}$ B $(1,e)$ C $\dfrac{(1,e)}{\sqrt{1+e^2}}$ D $(0,1)$ E nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ nel punto corrispondente a $(x_0,y_0) = (2,1)$ è:

Risposta:

A $z = 2 + 2x + y$
B $z = -x - 2y + 2$
C $z = x - 2y + 2$
D $z = 1 + 2x + y$
E nessuna delle altre risposte

APPELLO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - GIUGNO 2018

Cognome e nome	Matr.

REGOLE D'ESAME

1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!

2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

♡ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 3x^2y^2 - 3x\,,$$

- trovare e classificare tutti i suoi punti critici;
- determinare tutte le direzioni $\mathbf{v}$ per cui $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,1) < 0$.

Punti critici: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ sella;

$(1, 1)$ punto di minimo relativo

$(-1,-1)$ sella.

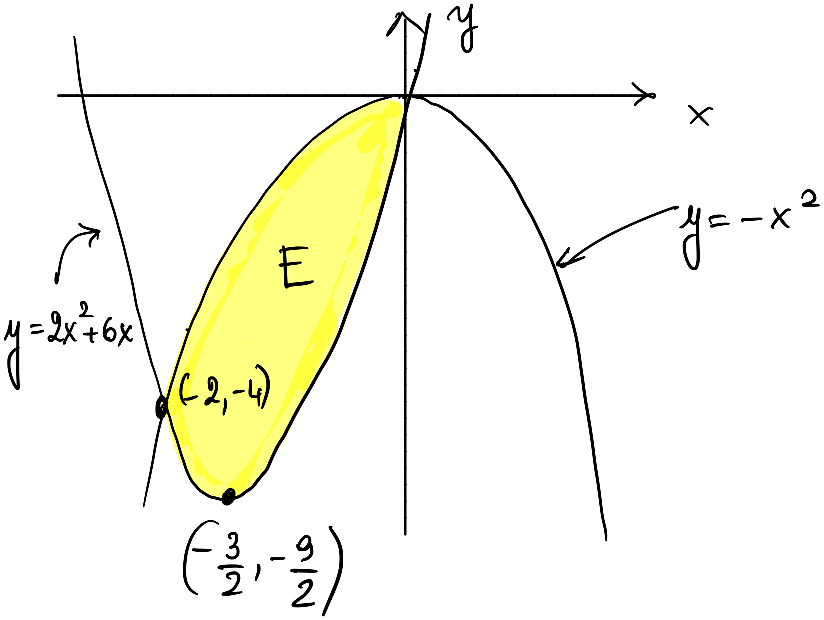
$\nabla f(0,1) = (-9, 0)$

Quindi $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,1) < 0 \quad \forall\ \underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$v_1^2 + v_2^2 = 1\,, \quad v_1 > 0.$

♡ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.

- Disegnare l'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 + 6x \le y \le -x^2\right\}$, e calcolare $\displaystyle\iint_E y\,dx\,dy$.
- Scrivere le formule di riduzione per calcolare l'integrale invertendo l'ordine di integrazione delle variabili (in questo caso non è richiesto di ricalcolare l'integrale).



$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} dx \left(\int_{2x^2+6y}^{-x^2} y\,dy \right) = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} \left[x^4 - (2x^2+6x)^2 \right] dx = -\frac{48}{5}$$

$$\iint_E y\,dx\,dy = \int_{-9/2}^{-4} dy \left(\int_{\frac{-3-\sqrt{9+2y}}{2}}^{\frac{-3+\sqrt{9+2y}}{2}} dx\ y \right) + \int_{-4}^{0} dy \left(\int_{-\sqrt{-y}}^{\frac{-3+\sqrt{9+2y}}{2}} dx\ y \right)$$

♡ - **Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, −1 a quelle sbagliate**

Esercizio 3. Dire per quale valore di α il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\alpha y + 1}{(x+2)^2}\,,\ \frac{x}{x+2} \right)$$

è conservativo nel semipiano $\{x > -2\}$.

Risposta:

$\boxed{\text{A}}$ nessun valore di α $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 2$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = -2$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 1$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 4. L'espressione che fornisce l'integrale curvilineo $\int_\gamma y\, ds$ lungo la curva γ di equazione $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$, è data da (non si richiede di calcolare l'integrale):

Risposta: $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\, dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 5. Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t\, e^{2t}\,, \\ y(t) = t^2\,. \end{cases}$$

Il versore tangente a γ nel punto $(0,0)$ è:

Risposta: $\boxed{\text{A}}$ $(1,0)$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{(e,1)}{\sqrt{e^2+1}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{(2e,1)}{\sqrt{4e^2+1}}$ $\boxed{\text{D}}$ $(2,0)$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ nel punto corrispondente a $(x_0,y_0) = (-1,2)$ è:

Risposta:

$\boxed{\text{A}}$ $z = -1 - x + 2y$
$\boxed{\text{B}}$ $z = 8x + 4y - 12$
$\boxed{\text{C}}$ $z = -8x + 4y - 12$
$\boxed{\text{D}}$ $z = 2 - x + 2y$
$\boxed{\text{E}}$ nessuna delle altre risposte

APPELLO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - GIUGNO 2018

Cognome e nome	Matr.

REGOLE D'ESAME

1) Non è ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Soltanto carta e penna!

2) Il compito deve essere svolto su questi fogli (utilizzando anche il retro), che sono gli unici ad essere consegnati al docente per la correzione.

♠ - **Esercizio 1** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.
Data la funzione
$$f(x,y) = 12y - y^3 - 3x^2y^2 + 6xy\,,$$

- trovare e classificare tutti i suoi punti critici;
- determinare tutte le direzioni $\mathbf{v}$ per cui $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0) > 0$.

Punti critici: $(2,0)$ sella;

$(1/2, 2)$ punto di massimo relativo;

$\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ sella.

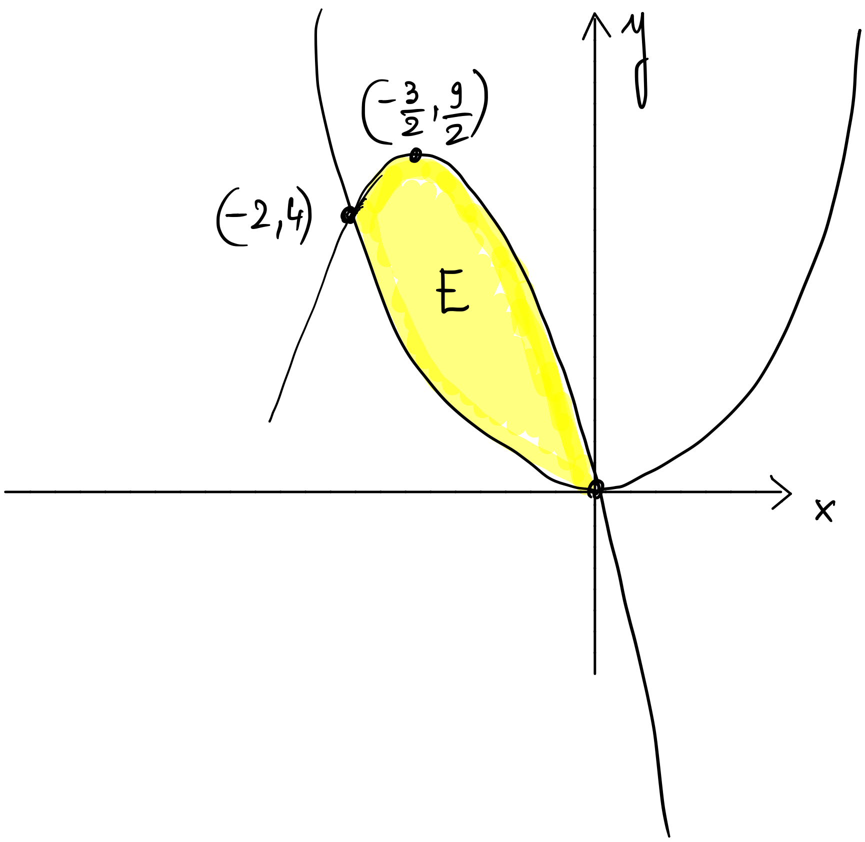
Si ha $\nabla f(1,0) = (0, 18)$.

Quindi $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) > 0 \quad \forall\ \underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$v_1^2 + v_2^2 = 1\,, \quad v_2 > 0.$

♠ - **Esercizio 2** (Da svolgere nello spazio sottostante ed eventualmente sul retro del foglio) - 10 punti.

- Disegnare l'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq -2x^2 - 6x\right\}$, e calcolare $\displaystyle\iint_E y\,dx\,dy$.
- Scrivere le formule di riduzione per calcolare l'integrale invertendo l'ordine di integrazione delle variabili (in questo caso non è richiesto di ricalcolare l'integrale).



$$\iint_E y\,dxdy = \int_{-2}^{0} dx \left(\int_{x^2}^{(-2x^2-6x)} dy \ y\right) = \int_{-2}^{0} \left[(-2x^2-6x)^2 - x^4\right] dx = \frac{48}{5}$$

$$\iint_E y\,dxdy = \int_0^4 dy \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\frac{-3+\sqrt{9-2y}}{2}} dx \ y\right) + \int_4^{9/2} dy \left(\int_{\frac{-3-\sqrt{9-2y}}{2}}^{\frac{-3+\sqrt{9-2y}}{2}} dx \ y\right)$$

♠ - **Nei seguenti esercizi indicare con una croce la risposta. Verranno assegnati 3 punti alle risposte esatte, 0 a quelle non espresse, −1 a quelle sbagliate**

Esercizio 3. Dire per quale valore di α il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y+\alpha}{y+3}, \frac{3x-1}{(y+3)^2} \right)$$

è conservativo nel semipiano $\{y > -3\}$.

Risposta:

[A] nessun valore di α [B] $\alpha = 5$ [C] $\alpha = 1$ [D] $\alpha = -1$ [E] nessuna delle altre risposte

Esercizio 4. L'espressione che fornisce l'integrale curvilineo $\int_\gamma y\,ds$ lungo la curva γ di equazione $y = \sqrt{x}$, $x \in [1,2]$, è data da (non si richiede di calcolare l'integrale):

Risposta: [A] $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx$ [B] $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4x+1}\,dx$ [C] $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx$

[D] $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+x^2}\,dx$ [E] nessuna delle altre risposte

Esercizio 5.

Si consideri la spirale γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t\,\cos(\pi t)\,, \\ y(t) = t\,\sin(\pi t)\,. \end{cases}$$

Il versore tangente a γ nel punto $(2,0)$ è:

Risposta: [A] $\dfrac{(1,2\pi)}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ [B] $(1,2\pi)$ [C] $\dfrac{(-1,-2\pi)}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ [D] $(-1,-2\pi)$ [E] nessuna delle altre risposte

Esercizio 6. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^3 y$ nel punto corrispondente a $(x_0,y_0) = (1,2)$ è:

Risposta:

[A] $z = 2 + x + 2y$
[B] $z = -6x + y - 6$
[C] $z = 1 + x + 2y$
[D] $z = 6x + y - 6$
[E] nessuna delle altre risposte