ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
FOGLIO N. 6 DI ESERCIZI

A. Dall'Aglio, F. De Marchis

Soluzioni degli esercizi.

1. Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y-4}$

a) trovarne e disegnarne il dominio;
b) trovare e classificare eventuali punti critici di f;
c) trovare massimo e minimo assoluti di f nell'insieme
$T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$

---

a) Dominio: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x+y-4=0\}$. E' il piano privato della retta $y = 4-x$. Il disegno è ovvio.

b) Non ci sono pti critici.

c) $P_1(\sqrt{3}, 1)$ pto di min. assoluto. $f(P_1) = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$P_2(-\sqrt{3}, 1)$ " " max. " $f(P_2) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

2. Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + y$,

a) trovare e classificare i suoi punti critici;

b) trovare massimo e minimo assoluti di f nell'insieme

$$C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

---

a) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ unico pto critico. E' punto di minimo relativo (anzi assoluto, basta osservare che

$$f(x,y) = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

b) $$\max_{(x,y)\in C} f(x,y) = f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = 15$$

$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -1.$$

3. Data $\quad f(x,y) = (y^3 - y)(x - 2y)$,

a) trovare e classificare i suoi punti critici;

b) trovare massimo e minimo assoluti di f nel triangolo chiuso T di vertici $(0,0), (2,1), (2,0)$.

---

a) Pti critici: $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$, tutti pti di sella.

b) $\max\limits_{T} f = 0$ (assunto sul segmento $(0,0),(2,1)$ e sull'asse x)

$$\min_{T} f = f\left(2, \frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)$$

4\. Data $$f(x,y) = x^2y + xy^2 + y\,,$$

a) trovare e classificare i suoi punti critici;

b) trovare massimo e minimo di f nella regione limitata di piano delimitata dalle curve

$$x=2\,, \quad y=3\,, \quad xy=1\,.$$

---

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ punto di sella;

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ punto di sella;

b) Detta C la regione descritta,

$$\max_C f = f(2,3) = 33$$

$$\min_C f = f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,.$$

5. Data $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y-x^2+4}{xy}\right)$

a) determinarne il dominio;

b) determinare estremo superiore, estremo inferiore, immagine;

c) determinare e classificare i pti critici.

---

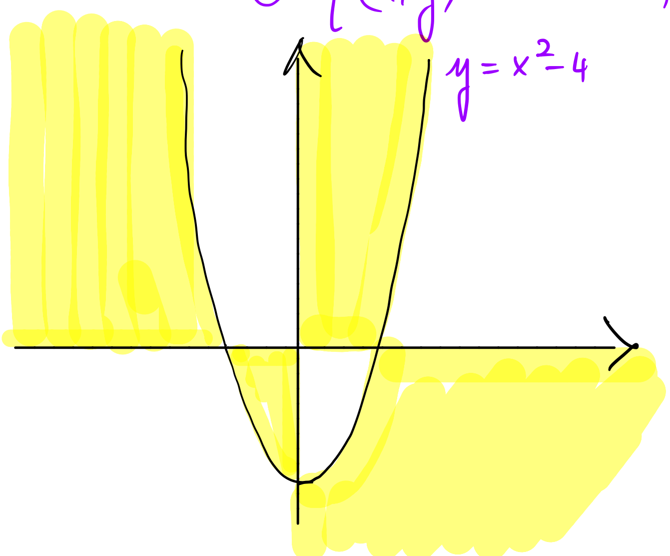
a) $\mathrm{dom}\, f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{y-x^2+4}{xy} > 0\right\} =$

$= \{(x,y) : x>0, y>0, y>x^2-4\} \cup$

$\cup \{(x,y) : x<0, y<0, y>x^2-4\} \cup$

$\cup \{(x,y) : x>0, y<0, y<x^2-4\} \cup$

$\cup \{(x,y) : x<0, y>0, y<x^2-4\}.$



b) $\sup f(x,y) = +\infty$
(basta, ad esempio, calcolare $\displaystyle\lim_{y\to 0^-} f(3,y) = +\infty$)

$\inf f(x,y) = 0$ (basta calcolare $\displaystyle\lim_{y\to -3^-} f(1,y) = -\infty$)

e quindi $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

c) $(2,-8)$, sella

. Oss: essendo $\ln t$ una funzione strettamente crescente, è sufficiente classificare i punti critici di $g(x,y) = \dfrac{y-x^2+4}{xy}$.

6. Data $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 + x^2 + 2y$,

a) determinare e classificare i suoi pti critici;

b) Scrivere e rappresentare graficamente $\nabla f(0,-1)$. In tale pto $(0,-1)$ trovare una direzione lungo cui la derivata direzionale si annulla

---

a) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ minimo relativo;

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ sella.

b) $\underline{v} = (0, \pm 1)$

7. Data $f(x,y) = \sqrt{9 - 9x^2 - (y-1)^2}$,

a) determinarne il dominio, e disegnarlo;

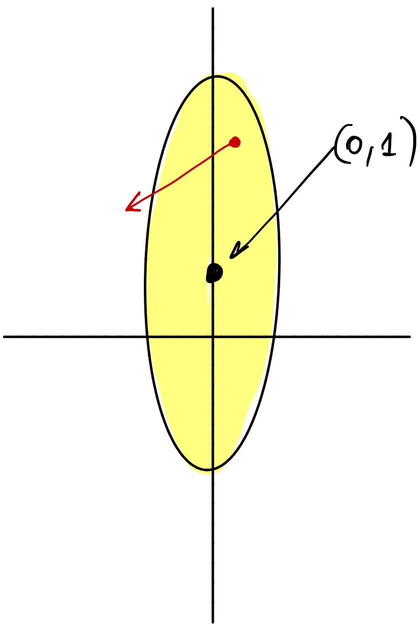
b) scrivere e disegnare $\nabla f(1/3, 3)$;

c) determinare $\inf f$, $\sup f$, $\operatorname{Im} f$;

d) determinare i pti critici di f e classificarli.

---

a) il dominio è l'ellisse (chiusa) $x^2 + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1$, che ha centro $(0,1)$ e semiassi pari a 1 e 3.



b) $\nabla f\left(\frac{1}{3}, 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ disegnato in rosso a lato.

c) $\inf f = \min f = 0$ assunto sulla frontiera.

$\sup f = \max f = f(0,1) = 3$

d) unico pto critico è $(0,1)$, che è un massimo (assoluto).

8. Data $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+2}$,

a) trovare il dominio D di f, e mostrare che f non ammette né max. assoluto né minimo assoluto in D;

b) trovare e classificare i punti critici di f;

c) trovare massimo e minimo assoluti di f in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

---

a) Il dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=-2\}$ cioè il piano privato della retta verticale $x=-2$. f non ammette massimo e minimo assoluti in quanto

$$\sup_D f = +\infty \quad \left(\text{osservare, per es., che } \lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty\right)$$

$$\inf_D f = -\infty \quad \left(\text{per es., } \lim_{y\to+\infty} f(-3,y) = -\infty\right)$$

b) $(0,0)$ minimo relativo;

$(-4,0)$ massimo relativo.

c) $\min_E f = f(0,0) = 0$

$\max_E f = f(-1,0) = 1$.

9. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1$$

$(0,0)$ massimo relativo

$(2,0)$ sella

$(0,\pm\sqrt{2})$ selle

$(2,\pm\sqrt{2})$ minimi relativo.

10. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y - 7$$

$(1,-2)$ e $(-1,2)$ selle

$(2,-1)$ minimo relativo

$(-2,1)$ massimo relativo.

11. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 + y^2 + 1$$

$(0,0)$ sella

$(\pm 1, 0)$ minimi relativi.

12. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 12x^2 + xy^3 + y^2 - 2$$

$(0,0)$ minimo relativo;

$\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ sella;

$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ sella.

13. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = y + y\ln^2 x - y^2 \ln x$$

$$\left(e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$ entrambi selle.

14 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 - x^3(y-1) + 12(y-1)^2$$

$(0, 1)$ min. relativo

$\left(2, \frac{4}{3}\right)$ sella

$\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ sella

15. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - 3x + 2)(xy + 1)$$

$\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $(1, -1)$, $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ tutti selle

16. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^3)\ln x$$

$(1,-1)$ sella;

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$ né max né minimo; la matrice hessiana è solo semidefinita, tuttavia è facile vedere che lungo la retta $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ la funzione

$\varphi(y) := f\left(\frac{1}{\sqrt{e}},y\right)$ ha un flesso a tg. orizzontale in $y=0$.