# ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
## FOGLIO N. 7 DI ESERCIZI

A. Dall'Aglio, F. De Marchis

---

1. Verificare che la curva $\gamma \begin{cases} x(t) = \text{sen}^3 t \\ y(t) = 2t \,\text{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

è una curva regolare. Calcolare il versore tangente e la retta tangente a $\gamma$ per $t = \frac{\pi}{3}$.

2. Disegnare la curva

$$\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \,\text{sen}\, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne vettore tangente e retta tangente nel punto $P\left(\frac{\pi^2}{18}, \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}\right)$.

3. Consideriamo una curva, espressa in coordinate polari nella forma

$$\rho = \rho(\theta) \qquad \theta \in [a, b].$$

In altre parole, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [a, b].$$

con $\rho(\theta) : [a, b] \to [0, +\infty)$ di classe $C^1$.

Verificare che la lunghezza della curva è data da

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta .$$

4. Sfruttando il risultato dell'e 'zio precedente, calcolare la lunghezza della cardioide, di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 1 + \cos\theta , \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

5 (*). Calcolare la lunghezza delle spirale archimedea di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = \theta \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

6. Calcolare $\int_\gamma xy\, ds$, dove $\gamma$ è la parte dell'ellisse

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che si trova nel 1° quadrante.

7. Calcolare il baricentro di un quarto di "astroide", di eq$^{ni}$ parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

8. Calcolare $\int_\gamma \sqrt{9x^2 + \frac{y^2}{9}}\, ds$, dove $\gamma$ è l'ellisse di equazione cartesiana $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

9. Calcolare $\int_\gamma \sqrt{x^2 - y^2 + 1}\, ds$, dove $\gamma$ è la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = e^t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$.

10. Detto $\gamma$ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, con $x \in [0,1]$, calcolare

$$\int_\gamma x\, ds$$

11. Trovare un potenziale, se possibile, del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left( \frac{y^2 e^x x}{(x+1)^2} , \frac{2y e^x}{x+1} \right)$$

in ognuno dei due semipiani in cui è definito

12. Provare che il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left( 2x(1+y) - y \operatorname{sen}(xy) , x^2 - x \operatorname{sen}(xy) + \cos(2y) \right)$$

è conservativo. Si calcoli il lavoro di $\underline{F}$ lungo la curva $\gamma(t) = \left( t , \frac{\pi}{t^2} \right)$, $t \in [1,3]$.

13. Dato il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left( e^y - y^2 , 3y^2 - 2xy + xe^y \right),$$

dire se è conservativo, e calcolarne l'integrale sul quarto di circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 1$

con $x \geq 1$, $y \leq 0$,

percorso in senso orario.

14. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left( \left(1 - \frac{y}{x}\right) e^{y/x} , \ e^{y/x} \right)$$

lungo la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 5 + \cos(t\pi) \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

(N.B. il calcolo diretto è complicato!)

15. Trovare tutte le costanti $a, b$ che rendono conservativo il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left( \frac{ay}{1+x^2y^2} + \frac{2x}{1+x^2} , \frac{x}{1+x^2y^2} - b\cos y \right)$$

e trovarne un potenziale.

+ esercizi tratti dai testi di esame presenti sulla pagina web (ne ho aggiunti alcuni).