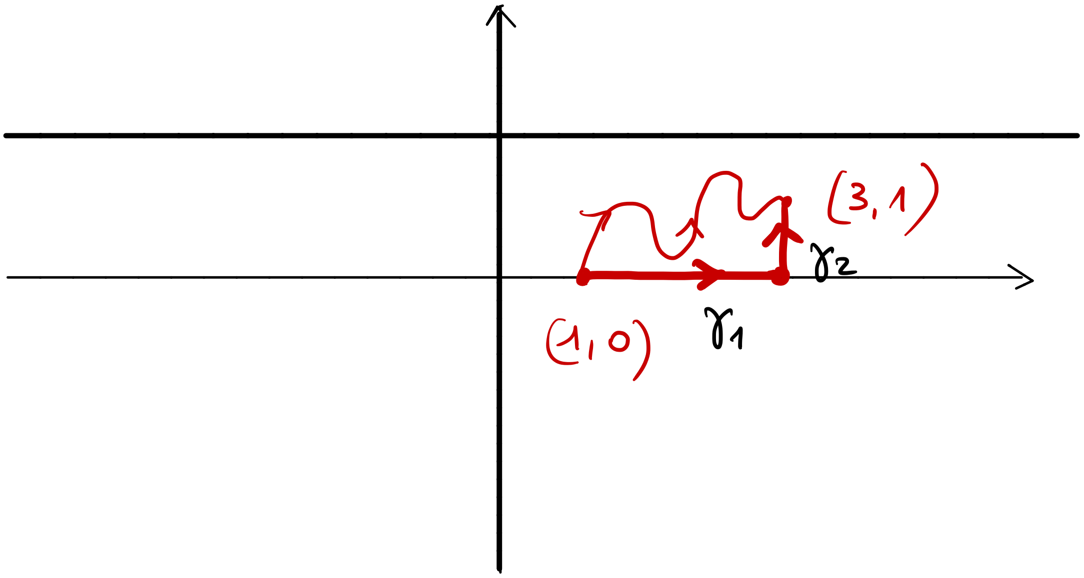
Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 - \alpha y}{x^2(y-2)} , \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

è irrotazionale. Per tali valori di α, dire se $\underline{F}$ è conservativo in ciascuno degli aperti connessi in cui è definito, e calcolare il lavoro compiuto per spostare un punto materiale da $(1,0)$ a $(3,1)$.

Dominio di $\underline{F}$ = $\mathbb{R}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=2\})$



Il dominio di F non è connesso, ma è unione disgiunta di 4 aperti semplicem. connessi. In ciascuno di essi $\underline{F}$ irrotaz $\iff$ $\underline{F}$ conservativo.

F irrotazionale?

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-\alpha y}{x^2(y-2)}\right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x^2}{x(y-2)^2}\right)$$

$$\frac{-\alpha(y-2)-(x^2-\alpha y)}{\cancel{x^2}\cancel{(y-2)^2}} \overset{?}{=} \frac{-2x^2-(2-x^2)}{\cancel{(y-2)^2}\cancel{x^2}}$$

$$-\cancel{\alpha y}+2\alpha-\cancel{x^2}+\cancel{\alpha y} \overset{?}{=} -\cancel{x^2}-2$$

F irrotaz $\Longleftrightarrow$ $\alpha=-1$

Per $\alpha=-1$ il campo è anche conservativo in ciascuno dei 4 quadranti.

Il lavoro richiesto non dipende dalla curva scelta.

1° modo: calcoliamo un potenziale $V(x,y)$ t.c.

$$V_x(x,y)=\frac{x^2+y}{x^2(y-2)} \qquad V_y(x,y)=\frac{2-x^2}{x(y-2)^2}$$

$$V(x,y)=\int\frac{2-x^2}{x(y-2)^2}\,dy=-\frac{2-x^2}{x(y-2)}+g(x)$$

$$V_x(x,y)=\frac{x^2+y}{x^2(y-2)}$$

$$\shortparallel$$

$$-\frac{-2x^2-(2-x^2)}{(y-2)\ x^2}+g'(x)$$

$$V_x(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2(y-2)}$$

$$\parallel$$

$$-\frac{-2x^2-(2-x^2)}{(y-2)\,x^2} + g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{x^2}+y-\cancel{x^2}-2}{x^2(y-2)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{x} + c.$$

$$\Rightarrow \quad V(x,y) = \frac{x^2-2}{x(y-2)} - \frac{1}{x} + c. =$$

$$= \frac{x^2-\cancel{2}-y+\cancel{2}}{x(y-2)} + c = \frac{x^2-y}{x(y-2)} + c.$$

$$\text{Lavoro} = V(3,1) - V(1,0) =$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{13}{6}$$

<u>2° modo</u>. Calcolo l'integrale lungo una curva "semplice".

Scelgo la spezzata $\gamma_1 \cup \gamma_2$ descritta in figura.

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x^2+y}{x^2(y-2)} , \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

$$\gamma_1 \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [1,3]$$

$$L_1 = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_1^3 \Big(F_1(t,0) \underbrace{x'(t)}_{=1} + F_2(t,0) \underbrace{y'(t)}_{=0} \Big) \, dt =$$

$$= \int_1^3 \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}(-2)} \, dt = -\frac{1}{2} \cdot (3-1) = -1.$$

$$\gamma_2 \quad \begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

è orientata nel verso giusto.

$$L_2 = \int_0^1 \Big(F_1(3,t) \underbrace{x'(t)}_{=0} + F_2(3,t) \underbrace{y'(t)}_{=1} \Big) \, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{7}{3} \right) \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{7}{3} \left. \frac{1}{t-2} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{7}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{6}$$

$$L = L_1 + L_2 = -1 - \frac{7}{6} = -\frac{13}{6}$$

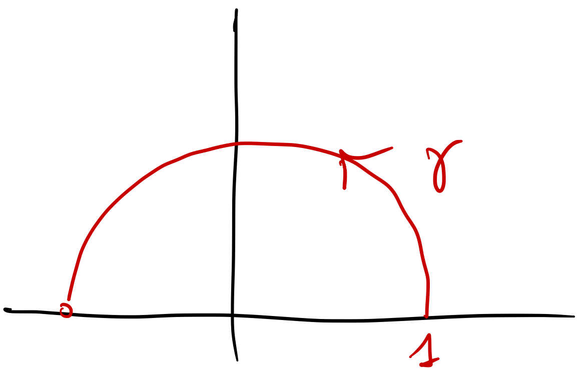
OSS. Riparametrizzando una curva, cioè scegliendo due rappresentazioni della stessa curva, il lavoro:

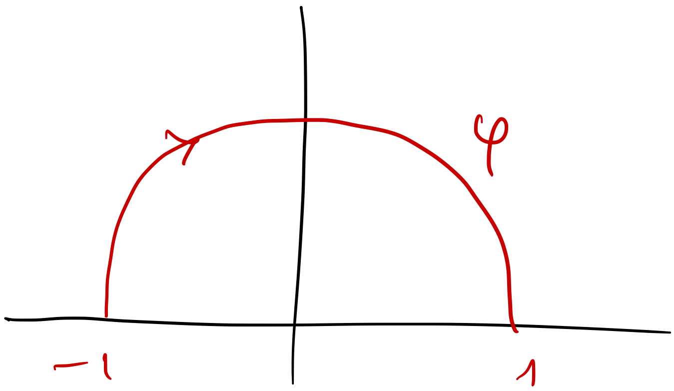
- rimane lo stesso se la curva è percorsa nello stesso verso;
- cambia di segno se la curva è percorsa in verso opposto;

($\underline{T}$ cambia segno nel secondo caso)

Esempio: $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, \pi]$

$$\underline{\varphi}(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \qquad t \in [-1, 1].$$





$$L_\gamma = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = - L_\varphi = - \int_\varphi \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds.$$

I matematici usano una notazione differente per l'integrazione dei campi vettoriali.

Campi vettoriali	Forme differenziali (per semplicità $N=2$)
$\underline{F}(x,y)=(F_1(x,y),\, F_2(x,y))$ campo vettoriale	$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ forma differenziale
$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds$ $\quad \boxed{\gamma(t)=(x(t),y(t)) \quad t\in[a,b]}$ $=$ $\int_a^b \left(F_1(x(t),y(t))\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + F_2(x(t),y(t))\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}\right)$	$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$
campo conservativo	forma diff. esatta
campo irrotazionale	forma diff. chiusa
Potenziale di $\underline{F}$	primitiva di ω

I teoremi valgono egualmente, solo con parole diverse, per es.

L'integrale di una forma diff. esatta lungo una curva è data dalla differenza di una sua primitiva nei due estremi della curva

L'esercizio dato prima poteva essere così enunciato

Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\omega = \frac{x^2-\alpha y}{x^2(y-2)}dx + \frac{2-x^2}{x(y-2)^2}dy$$

è chiusa. Per tale valori di α, dire se ω è esatta in ciascuno degli aperti connessi in cui è definita, e calcolare il suo integrale lungo una curva che vada da $(1,0)$ a $(3,1)$.

Rotore di un campo vettoriale piano.

$$\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

$$(\text{rot}\,\underline{F})(x,y) = \left((F_2)_x - (F_1)_y\right)(x,y) \text{ è uno scalare}$$

I campi irrotazionali sono quelli che hanno rotore identicamente nullo.