TEOREMA $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale C^1.

1) $\underline{F}$ irrotazionale $(F_1)_y \equiv (F_2)_x$

2) A aperto semplicemente connesso.

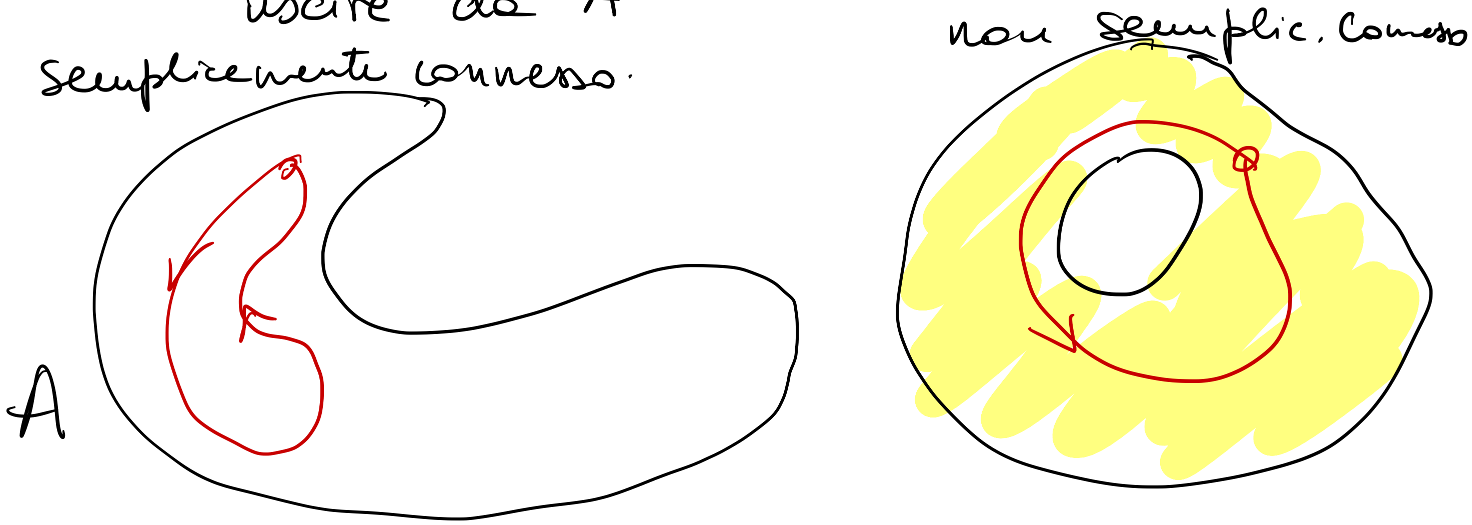
Allora $\underline{F}$ è conservativo.

Cosa vuol dire semplicemente connesso?

A aperto $\subset \mathbb{R}^N$ si dice semplicemente connesso se:

a) A è connesso per archi. (cioè comunque presi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ esiste una curva tutta contenuta in A che li collega.

b) ogni curva chiusa e semplice (senza auto intersezioni a parte il pto iniziale e finale) contenuta in A "si può deformare con continuità ad un pto senza uscire da A"



In $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso significa "connesso e senza buchi"

Es $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0,0\})$ non è sempl. connesso.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ non è sempl. connesso.

<u>OSS</u> Infatti il controesempio di campo irrotazionale ma non conservativo era un campo definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Applicazione:

Dato il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(3x^2y + xy^2 + 2,\ x^3 + x^2y - 1\right)$$

dire se è conservativo nel suo dominio, e calcolarne un potenziale.

Il dominio è $\mathbb{R}^2$ semplic. connesso.

Il campo è conservativo $\iff$ è irrotazionale

La domanda diventa: il campo è irrotazionale?

$$\left(3x^2y + xy^2 + 2\right)_y = \left(x^3 + x^2y - 1\right)_x$$

$$3x^2 + 2xy \overset{?}{=} 3x^2 + 2xy \qquad \text{sì.}$$

Campo irrotaz $\Rightarrow$ campo conservativo.

Cerchiamo il potenziale $V(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} V_x(x,y) = 3x^2y + xy^2 + 2 \\ V_y(x,y) = x^3 + x^2y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(x,y) = 3x^2y + xy^2 + 2 \\ V_y(x,y) = x^3 + x^2y - 1 \end{cases}$$