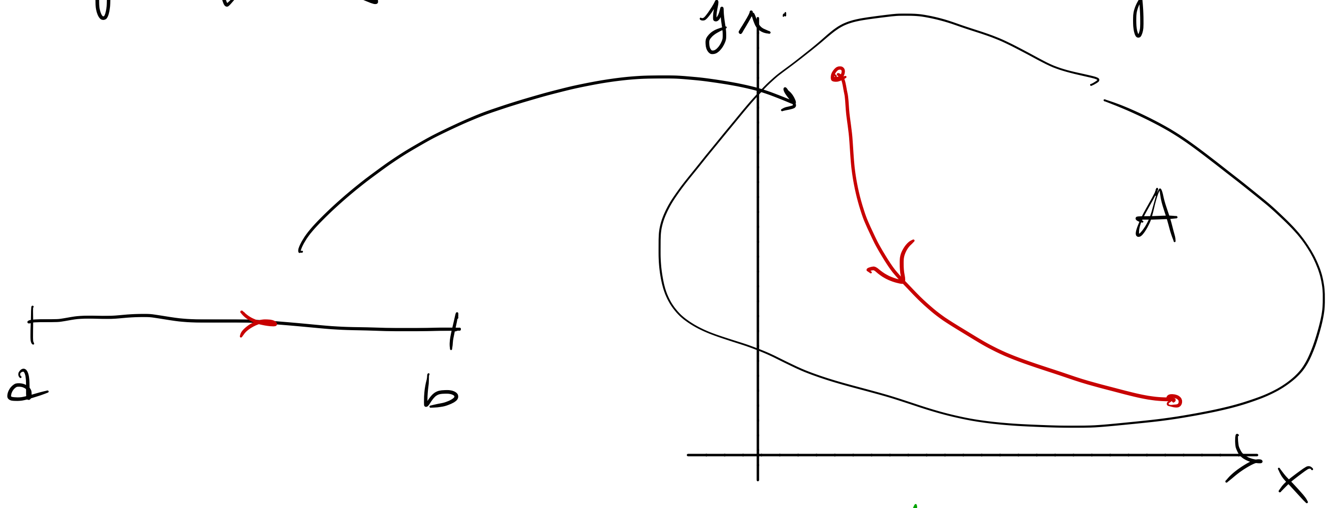
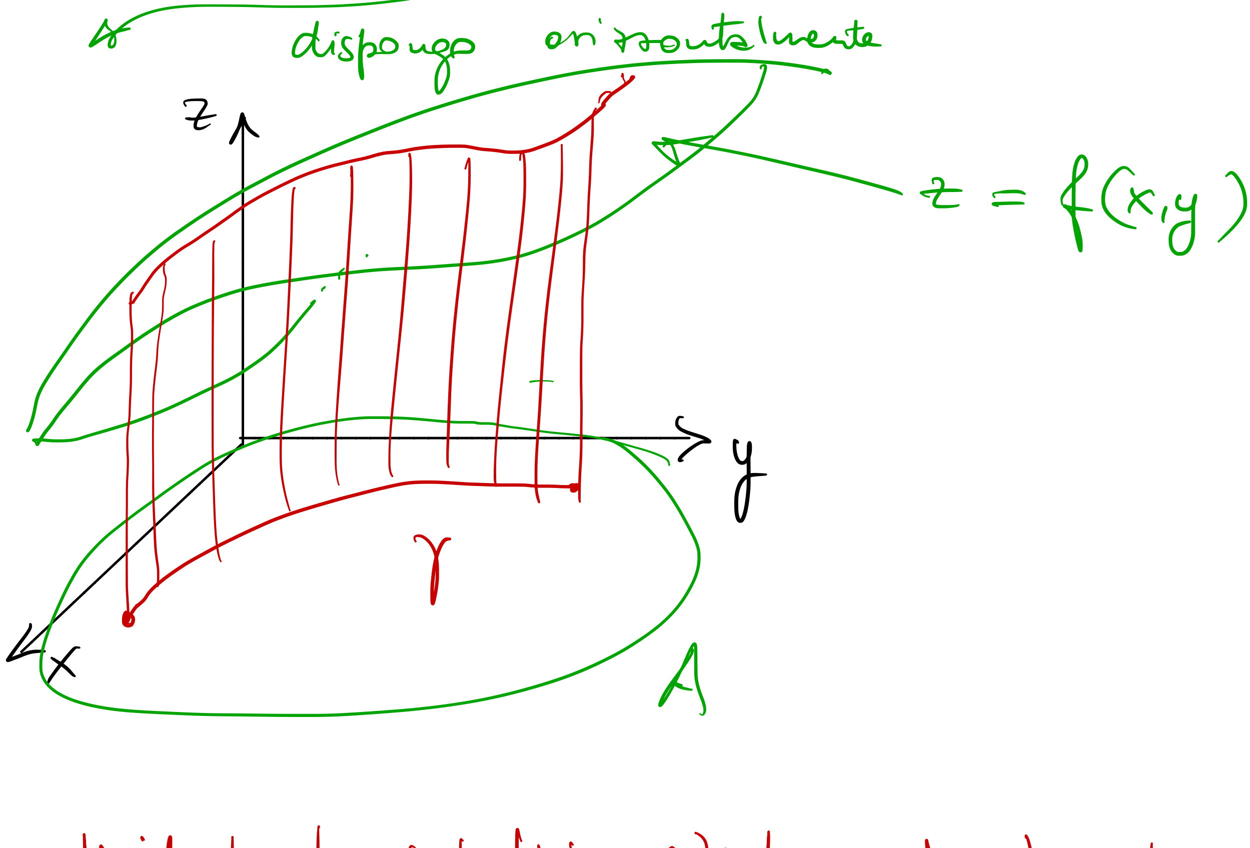
Ulteriore interpretazione dell'integrale curvilineo di una funzione scalare:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva regolare C^1.



$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.



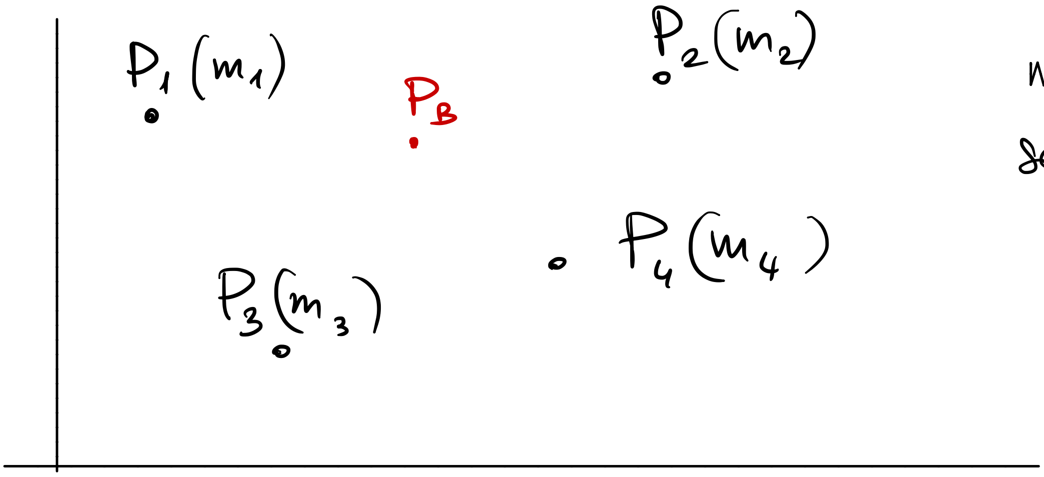
Resta individuata la superficie cilindrica che ha per "base" la curva γ ed è composta di tutti i segmenti verticali che vanno dal piano xy al grafico di f.

L'integrale $\int_\gamma f \, ds$ si interpreta come l'area della superficie cilindrica.

(se $f \geq 0$). Se $f \leq 0$ sarà pari all'area cambiata di segno, se f cambia segno si sommano e sottraggono i vari tratti.

Esempio: Baricentro di un filo metallico.

Ripasso: Baricentro di un sistema di punti



$m_1 \dots m_4$ sono le masse

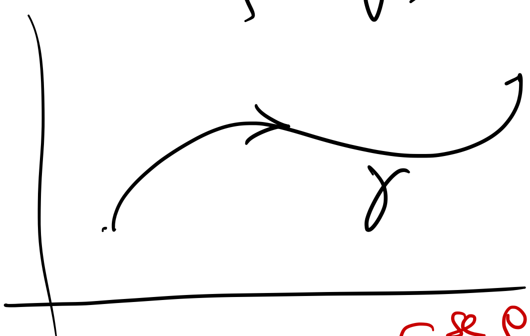
Baricentro $P_B(x_B, y_B)$

$$x_B = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i}$$

$$y_B = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

Baricentro di un filo metallico descritto da una curva γ con densità lineare $\rho(x,y)$

$P_B(x_B, y_B)$

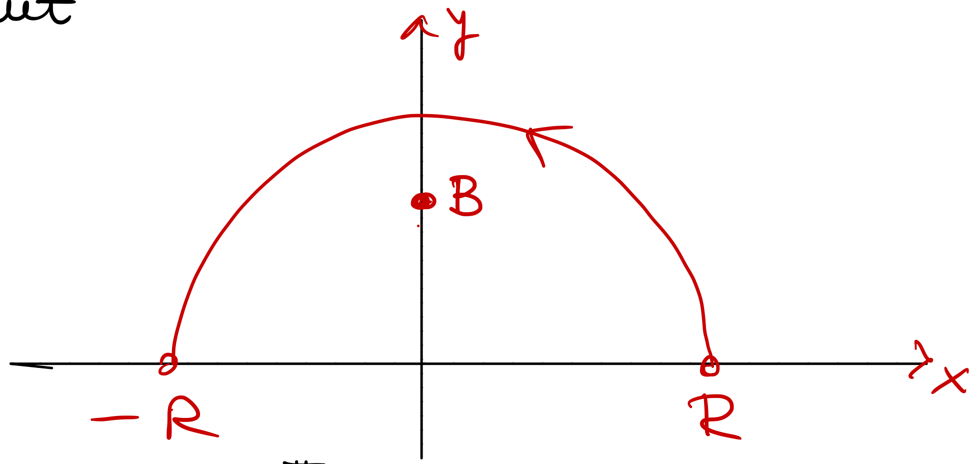


$$x_B = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\text{massa totale}} = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds} \overset{\text{se } \rho \text{ è costante}}{=} \frac{\int_\gamma x\,ds}{L(\gamma)}$$

$$y_B = \frac{\int_\gamma y\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds} \overset{\text{se } \rho \equiv c}{=} \frac{\int_\gamma y\,ds}{L(\gamma)}$$

Esempio: Baricentro di un semicerchio (densità lineare costante) $R>0$

$$\gamma \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi].$$



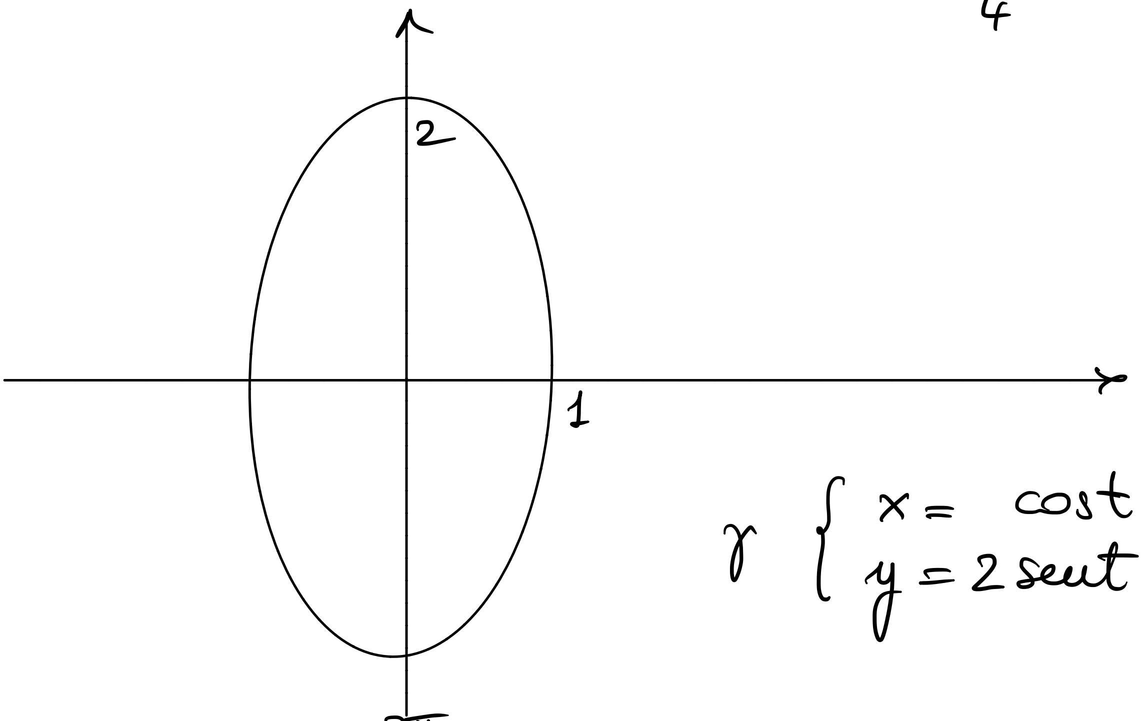
$$x_B = \frac{\int_\gamma x\,ds}{\underbrace{L(\gamma)}_{=\pi R}} = \frac{\int_0^\pi R\cos t \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt}_{R\,dt}}{\pi R} =$$

$$= \frac{R^{\cancel{2}} \int_0^\pi \cos t\,dt}{\pi \cancel{R}} = 0 \quad \text{come era prevedibile.}$$

$$y_B = \frac{\int_\gamma y \, ds}{L(\gamma)} = \frac{R^{\cancel{2}} \int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt}{\cancel{R}\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma (x^3+y^3)\,ds$

dove γ è l'ellisse $\left\{(x,y):\ x^2+\frac{y^2}{4}=1\right\}$.



$$\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\int_\gamma (x^3+y^3)\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + 8\operatorname{sen}^3 t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^3 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt \;+$$

$$+\, 8\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sqrt{4-3\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\,(1-\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{4-3\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\, f(\operatorname{sen} t)\,dt$$

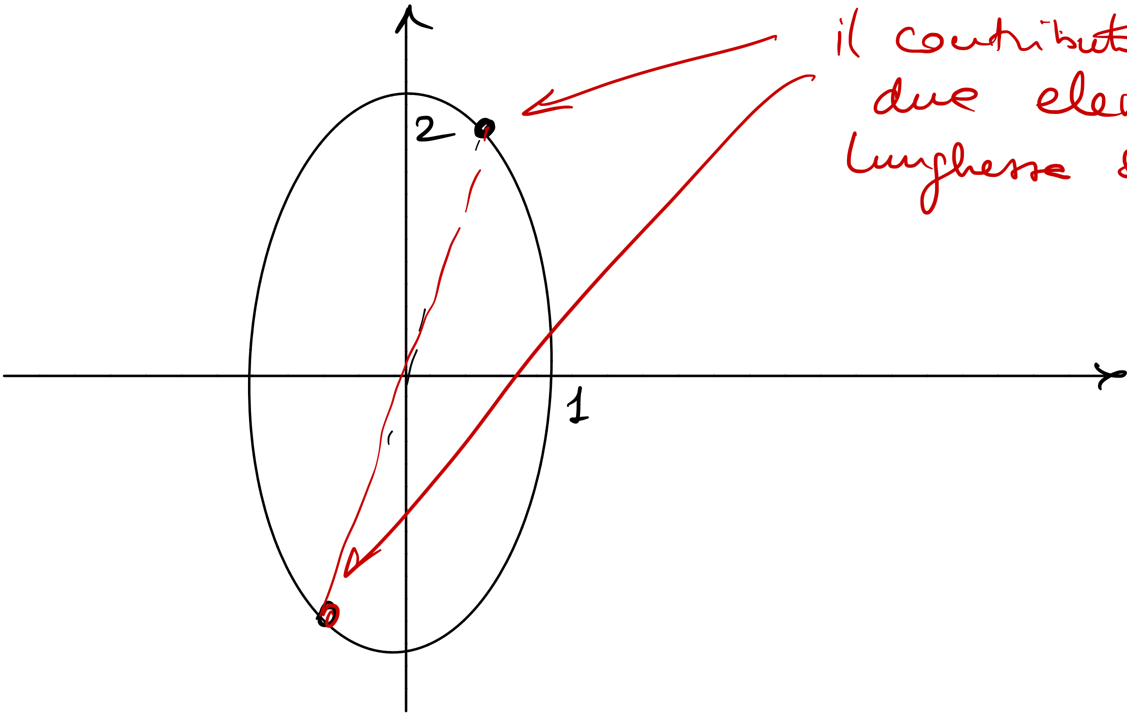
$\operatorname{sen} t = v \quad \cos t\, dt = dv$

$$\int_0^{2\pi} \cos t \; f(\operatorname{sen} t)\, dt =$$

$$= \int_0^0 f(v)\, dv = 0.$$

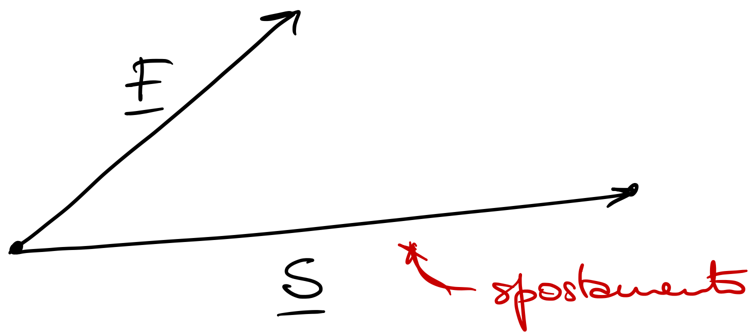
Anche l'altro integrale viene zero. Quindi il risultato richiesto vale zero.

Questo si poteva capire dall'inizio, in quanto f è dispari $(f(-x,-y) = -f(x,y))$ e il filo è simmetrico rispetto all'origine.



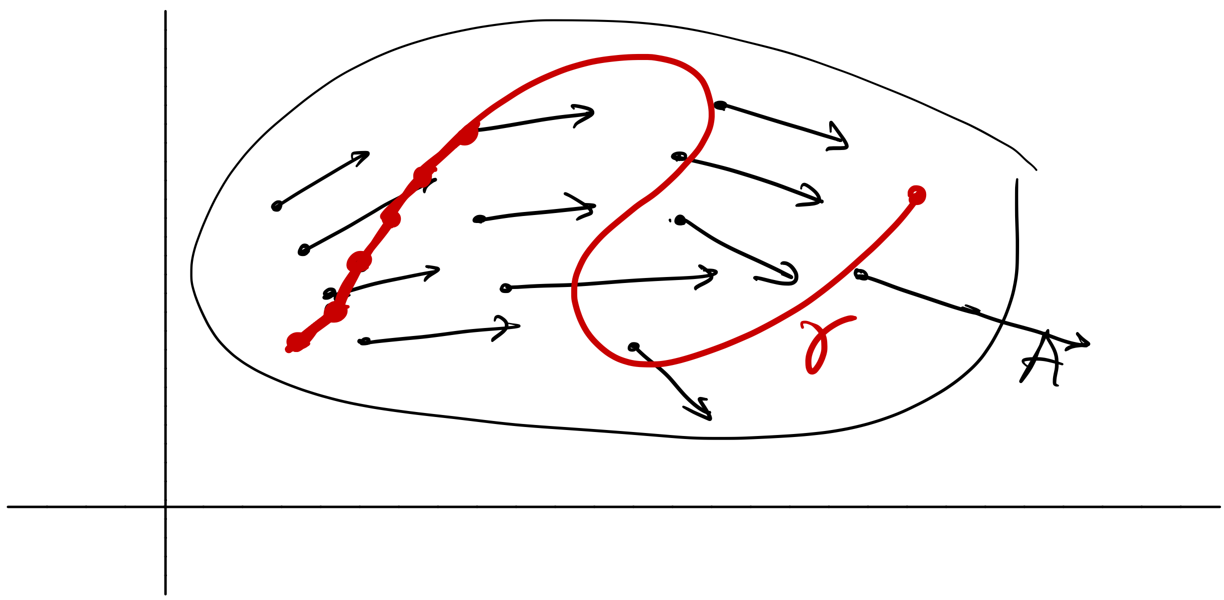
il contributo di questi due elementini di lunghezza si annulla

Altri integrali curvilinei: il <u>lavoro di una forza</u>



lavoro $= \underline{F} \cdot \underline{S}$

Cosa succede se $\underline{F}$ varia di punto in punto (campo vettoriale) e lo spostamento è non rettilineo?



L'idea è quello di approssimare la curva con una spezzata di tanti piccoli segmenti rettilinei, lungo le quali la forza può ragionevolmente considerarsi costante.