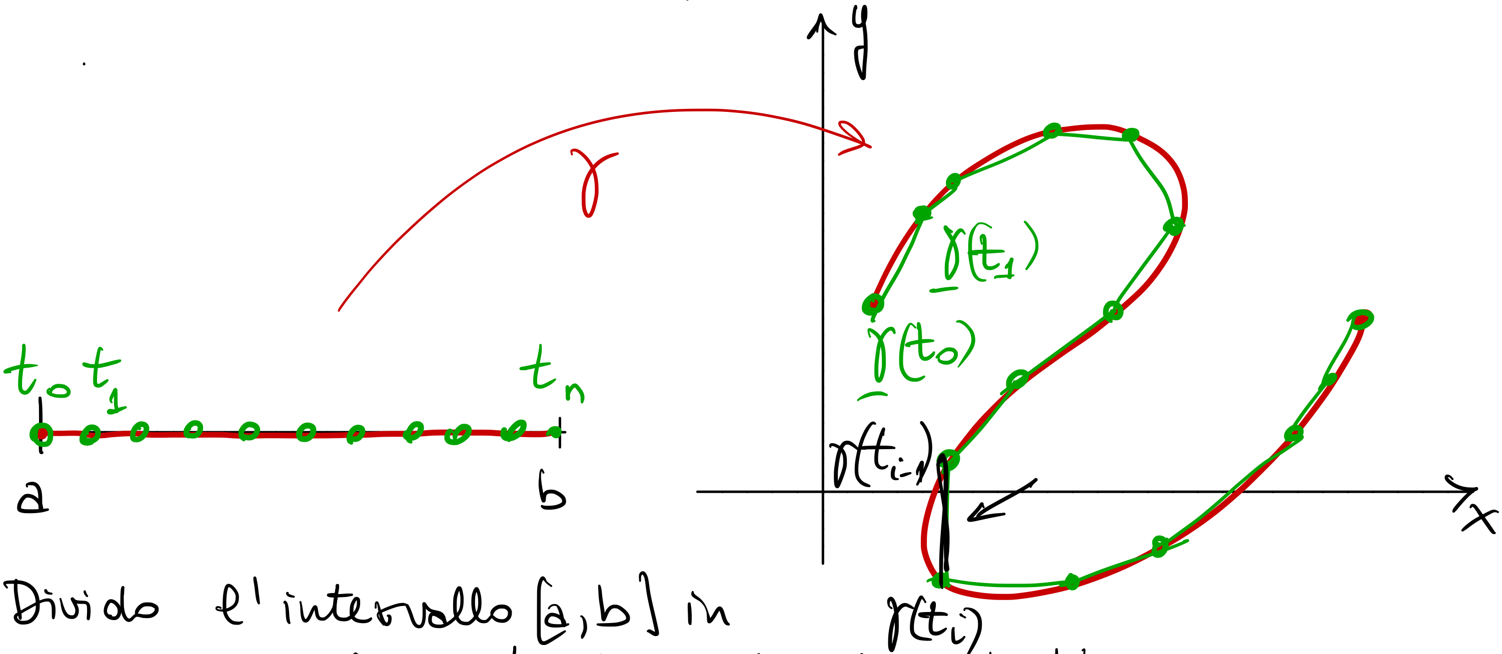
Lunghezza di una curva regolare

$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^3)$ di classe C^1

$$L(\underline{\gamma}) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}_{|\underline{\gamma}'(t)|}\, dt$$

Giustificazione della formula

$\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$



Divido l'intervallo $[a,b]$ in tanti intervalli introducendo dei punti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

Considero i corrispondenti pti di $\mathbb{R}^2$

$$\underline{\gamma}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$$

Una ragionevole approssimazione della lunghezza della curva è data dalla lunghezza della spezzata di vertici $\underline{\gamma}(t_0), \underline{\gamma}(t_1) \dots \underline{\gamma}(t_n)$

$$L_n(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} =$$

se t_i e t_{i-1} sono "vicini", allora

$$x(t_i) \sim x(t_{i-1}) + x'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) \sim x'(t_{i-1}) \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t}$$

supponiamo gli intervalli Δt siano tutti uguali.

$$\sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(t_{i-1})^2 \Delta t^2 + y'(t_{i-1})^2 \Delta t^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(t_{i-1})^2 + y'(t_{i-1})^2} \, \Delta t$$

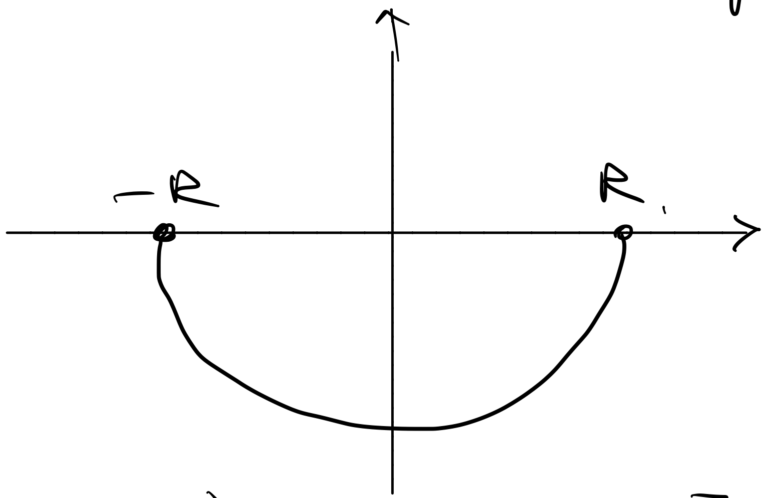
Per n (numero degli intervalli) $\to +\infty$, questo "diventa"

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

OSSERVAZIONE

Vi sono curve che descrivono lo stesso sostegno.

Per esempio:



1° modo:

$$\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \theta \in [\pi, 2\pi]$$

2° modo:

$$\tilde{\gamma}(\theta) = (R\cos\theta, -R\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \theta \in [0, \pi].$$

3° modo:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(t) = \left(t, -\sqrt{R^2 - t^2}\right) \qquad t \in [-R, R].$$

è la curva grafico $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$

Curve "imparentate" in questo modo si dicono equivalenti.

Come "deve essere", la lunghezza delle tre curve è uguale (farlo!)

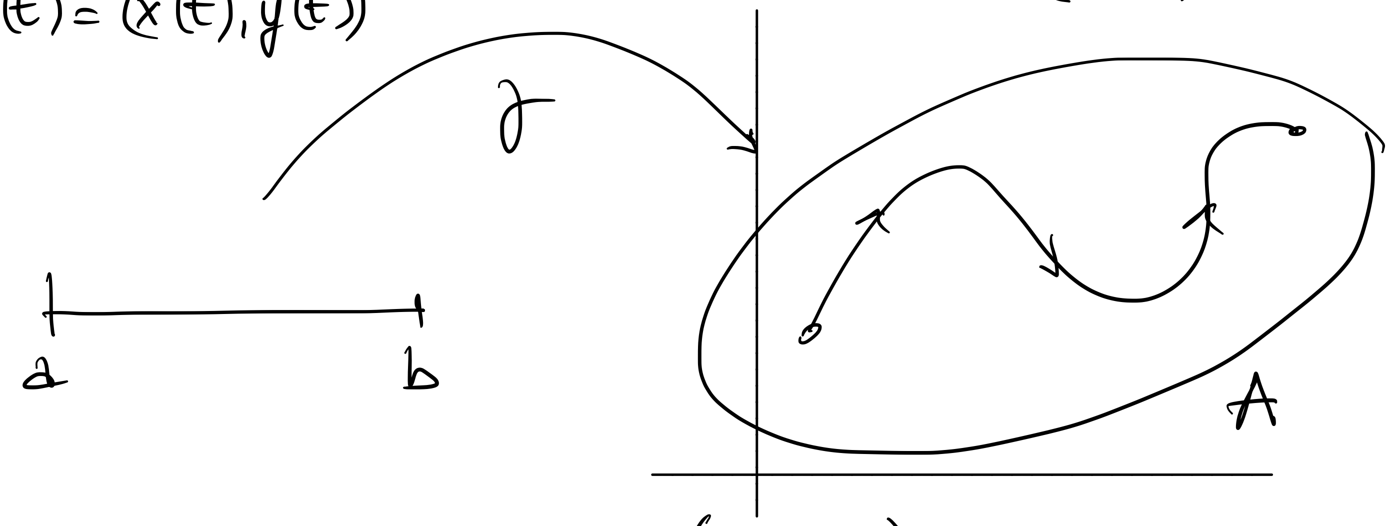
Integrali curvilinei di una funzione scalare

Sia $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua

$\uparrow$ aperto

Sia $\underline{\gamma}: [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^2$ una curva regolare $C^1([a,b])$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$



<u>OSS</u> f è definita sul sostegno della curva $\Rightarrow$ resta definita $f(\underline{\gamma}(t)) = f(x(t), y(t))$

Vogliamo definire $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\, \underbrace{ds}_{\text{elementino di lunghezza di } \gamma}$

<u>DEF</u> L'integrale curvilineo della funzione scalare f lungo la curva γ.

$\boxed{\text{Integrale curvilineo di } 1^a \text{ specie}}$

$$\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) \underbrace{|\underline{\gamma}'(t)|\, dt}_{ds} =$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}_{ds}$$

Esempio: calcolare

$$\int_\gamma x^2y^2\,ds, \quad \text{dove } \gamma \text{ è la circonferenza unitaria.}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$x(t) = \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$

$y(t) = \operatorname{sen} t$

$f(x,y) = x^2y^2$

$x'(t) = -\operatorname{sen} t \qquad y'(t) = \cos t$

$\underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 1}$

$$\int_\gamma x^2y^2\,ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t}_{f(\gamma(t))} \; 1 \; dt =$$

$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t)\,dt =$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\tau) = \frac{1 - \cos(2\tau)}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(4t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\pi - \cancel{\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)\Big|_0^{2\pi}}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Interpretazione dell'integrale curvilineo di f su γ

$$\int_\gamma f \, ds$$

Immagino la curva come un filo metallico disposto nel piano o nello spazio.

Supponiamo che il filo abbia densità lineare variabile lungo la curva. Supponiamo che la densità lineare in ogni pto sia $f(x,y)$.

Allora $\int_\gamma f(x,y)\, ds$ misura la massa totale del filo.

Applicazione: calcolo del baricentro di una curva

Data $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 + x^2 + 2y$,

a) determinare e classificare i suoi pti critici;

b) Scrivere e rappresentare graficamente $\nabla f(0,-1)$. In tale pto $(0,-1)$ trovare una direzione lungo cui la derivata direzionale si annulla

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2y + 2x$

$f_y(x,y) = 2x + 2y + 2$

$f_{xx}(x,y) = 6x+2$

$f_{xy}(x,y) = 2$

$f_{yy}(x,y) = 2$.

Pti critici

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y + 2x = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -1 - x$$

$$3x^2 - 2 \cancel{-2x} + \cancel{2x} = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{3} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$y = -1 \mp \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Pti critici $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$$D^2 f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{6}+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 f\underbrace{\left(\frac{\sqrt6}{3}, -1-\frac{\sqrt6}{3}\right)}_{P_1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt6+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det D^2 f(\quad) = (2\sqrt6+2)2-4 > 0$$

$$f_{xx}(\quad) = 2\sqrt6+2 > 0$$

$\Rightarrow P_1$ è pto di min. rel. stretto.

$$D^2 f\underbrace{\left(-\frac{\sqrt6}{3}, -1+\frac{\sqrt6}{3}\right)}_{P_2} = \begin{bmatrix} -2\sqrt6+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

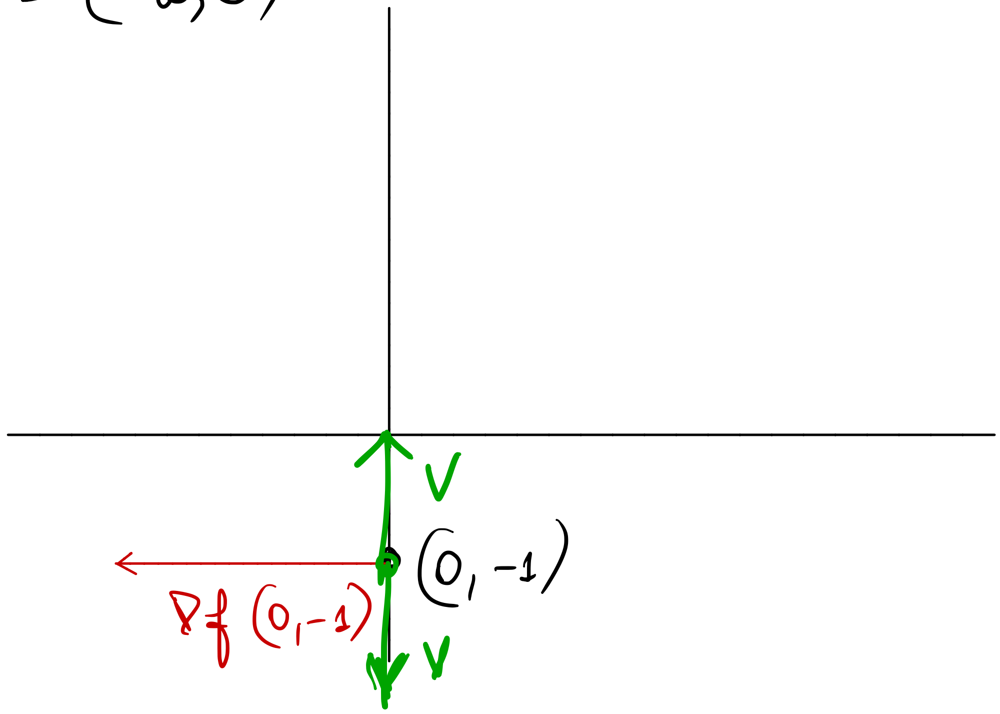
$$\det D^2 f(P_2) = 2(-2\sqrt6+2)-4 < 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow P_2$ è una sella

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2y + 2x \qquad f_x(0,-1) = -2$$

$$f_y(x,y) = 2x + 2y + 2 \qquad f_y(0,-1) = 0$$

$$\nabla f(0,-1) = (-2,0)$$



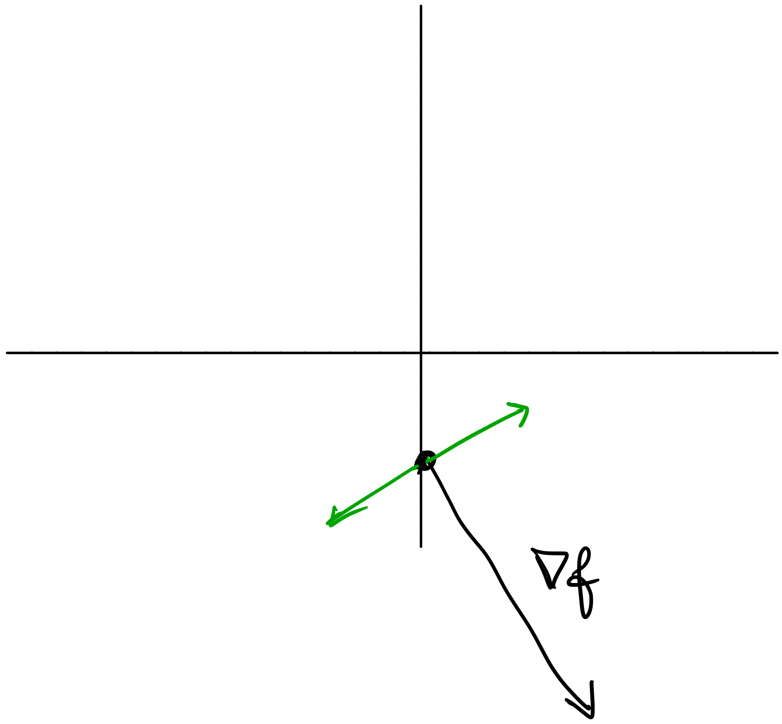
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,-1) = \nabla f(0,-1) \cdot \underline{v}$$

La derivata si annulla se $\underline{v} \perp \nabla f(0,-1)$, cioè

se $\underline{v} = (0,1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

$\underline{v} = (0,-1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

Se fosse stato $\nabla f(0,-1) = (2,-3)$, o



$$\nabla f \cdot \underline{v} = 0 \iff 2v_1 - 3v_2 = 0$$

Se scelgo per es $v_1 = 1$, ottengo $v_2 = +\frac{2}{3}$

$\left(1, \frac{2}{3}\right)$ ma non è una direzione

$/\!/ \ (3,2)$

$$\underline{v} = \frac{(3,2)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

ovviamente va bene anche

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 + y$$

a) Trovare e classificare i pti critici

b) trovare massimo e minimo assoluto di f nella regione limitata e chiusa di piano delimitata dalle curve

$$x=2, \quad y=3, \quad xy=1$$

$$f_x(x,y) = 2xy + y^2 \qquad f_{xx}(x,y) = 2y$$

$$f_y(x,y) = x^2+2xy+1 \qquad f_{xy}(x,y) = 2x+2y$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x$$

Pti critici

$$\begin{cases} 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 1 = 0 \end{cases} \iff y(2x+y)=0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2+1=0 \end{cases}$$

nessuna sol^{ne}

$$\begin{cases} y = -2x \\ x^2 - 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \mp\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2 pti critici:

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \qquad P_2 = -P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

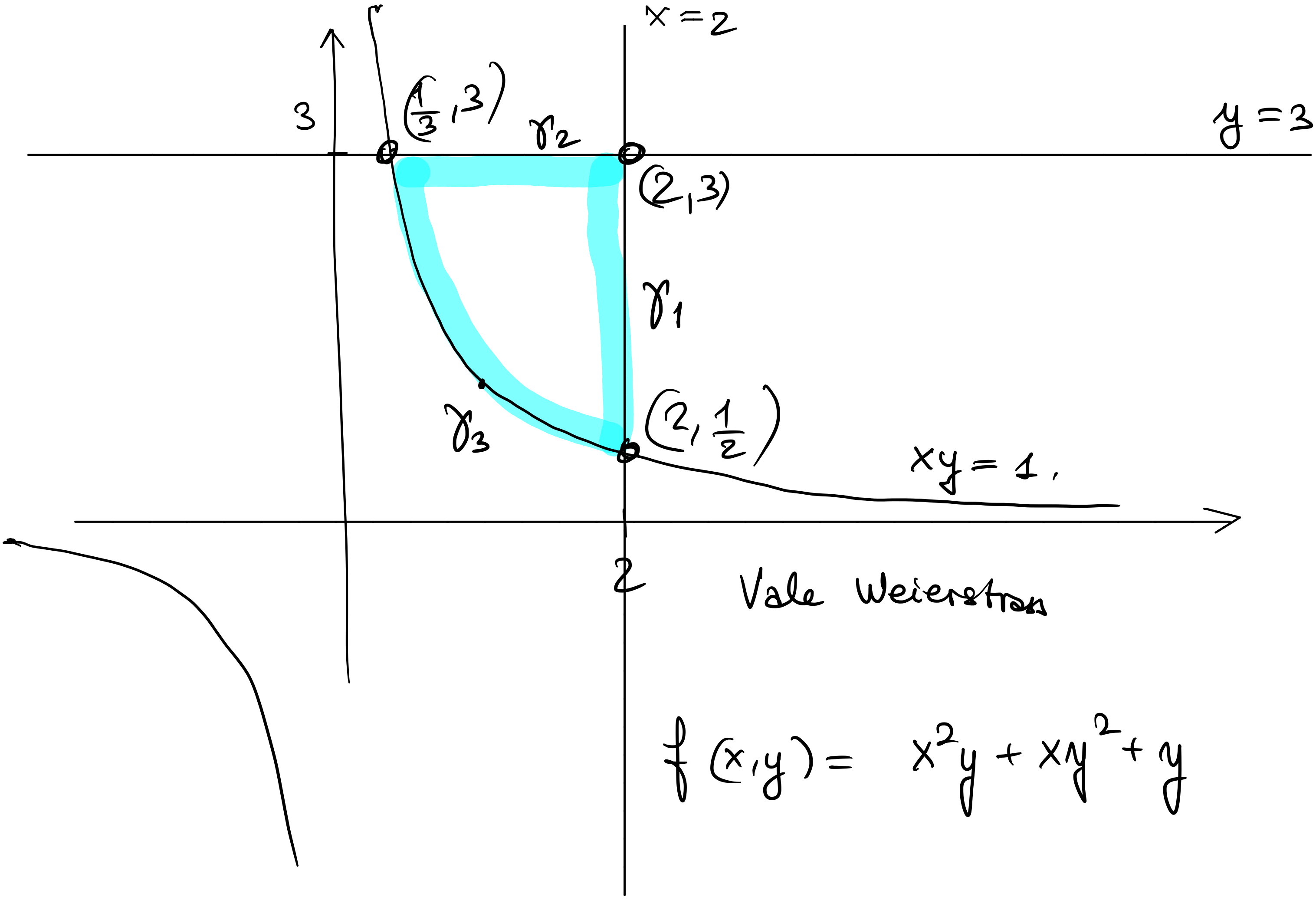
$$f_{xx}(x,y) = 2y$$
$$f_{xy}(x,y) = 2x + 2y$$
$$f_{yy}(x,y) = 2x$$

$$D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \left(= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

$\det D^2 f(P_1) < 0 \implies$ sella.

Lo studio di P_2 si può fare in modo simile oppure si può osservare che f è "dispari" nel senso che $f(-x,-y) = -f(x,y)$

e quindi anche P_2 è una sella.



Vale Weierstrass

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 + y$$

Pti critici interni o pti di non derivabilità non ce ne sono. Max e min sono assunti sulla frontiera.

$\underline{\underline{\gamma_1}}$ $(2,y)$ $y \in [\frac{1}{2},3]$

$$\varphi_1(y) = f(2,y) = 4y + 2y^2 + y = 2y^2 + 5y$$

$$\varphi_1'(y) = 4y + 5 = 0 \quad \text{se} \quad y = -\frac{5}{4} \notin [\frac{1}{2},3]$$

Pti da considerare $\boxed{(2,\frac{1}{2}) \quad (2,3)}$

γ_2 $(x,3)$ $x \in [\frac{1}{3},2]$

$$\varphi_2(x) = f(x,3) = 3x^2 + 9x + 3 = 3(x^2+3x+1)$$

$$\varphi_2'(x) = 3(2x+3) = 0 \qquad x = -3/2 \text{ non ammesso,}$$

Considero $(2,3)$ e $\boxed{\left(\frac{1}{3},3\right)}$

$\gamma_3 \quad \left(x, \frac{1}{x}\right) \qquad x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$

$$\varphi_3(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{2}{x} =$$

$$\varphi_3'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \iff x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \quad \underset{\text{ammissibile}}{x = \sqrt{2}}$$

Pti da considerare $\left(\frac{1}{3},3\right), \left(2,\frac{1}{2}\right), \boxed{\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Il max e il minimo sono da cercare tra

$(2,3), \left(2,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3},3\right) \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Si calcola f in questi 4 pti e si prende il più grande e il più piccolo