Domani 23/5 la lezione e l'esercitazione sono anticipate all'orario 9:10 → 11:00 in Aula II (quest'aula).

Curve regolari.

Una curva regolare è una funzione

$$\underline{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^3).$$

intervallo

$$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

t.c.

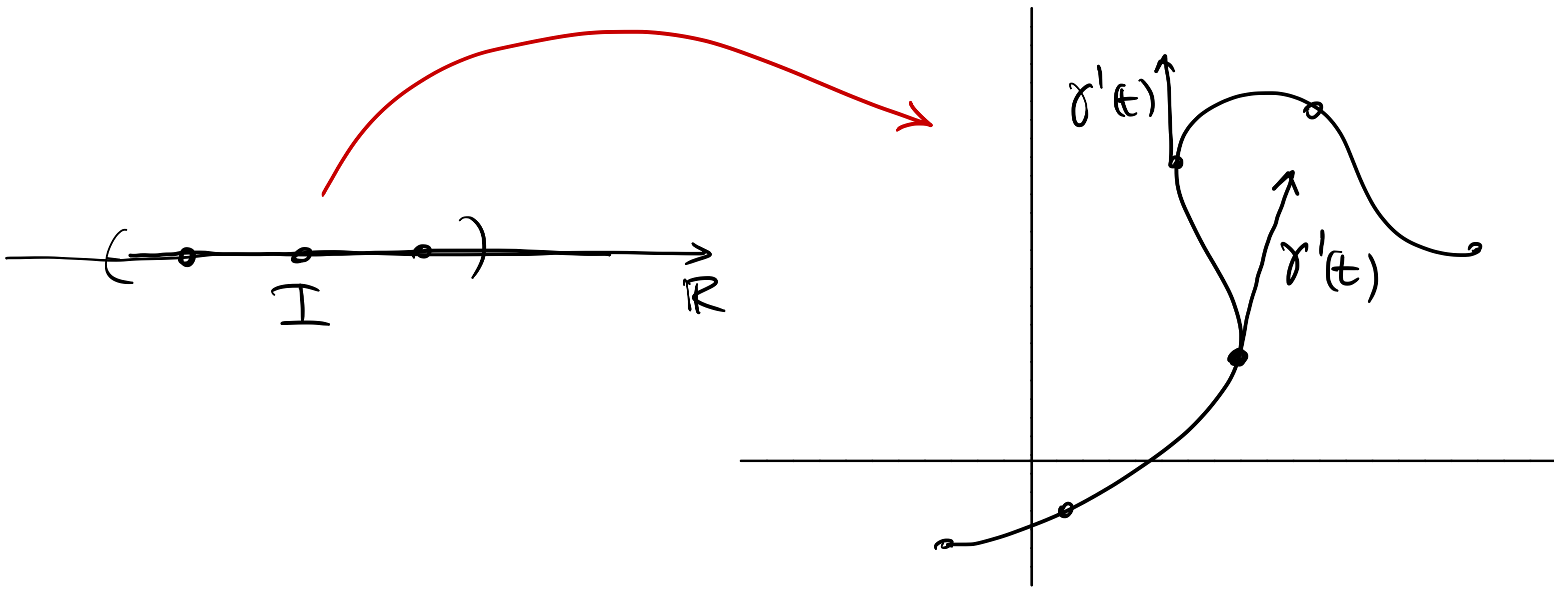
1) $\underline{\gamma}$ sia di classe $C^1(I; \mathbb{R}^2)$, cioè $x(t), y(t) \in C^1(I)$

2) $\underline{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t))$ non si annulla mai

(in alternativa) $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente

(in ") $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$

$\forall t$ interno ad I



$$\underline{\gamma}'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\underline{\gamma}(t+h)-\underline{\gamma}(t)}{h}$$

Il vettore $\gamma'(t)$ è il "vettore velocità" ed è tangente al sostegno della curva

<u>DEF</u> Sostegno di γ è l'immagine di γ.

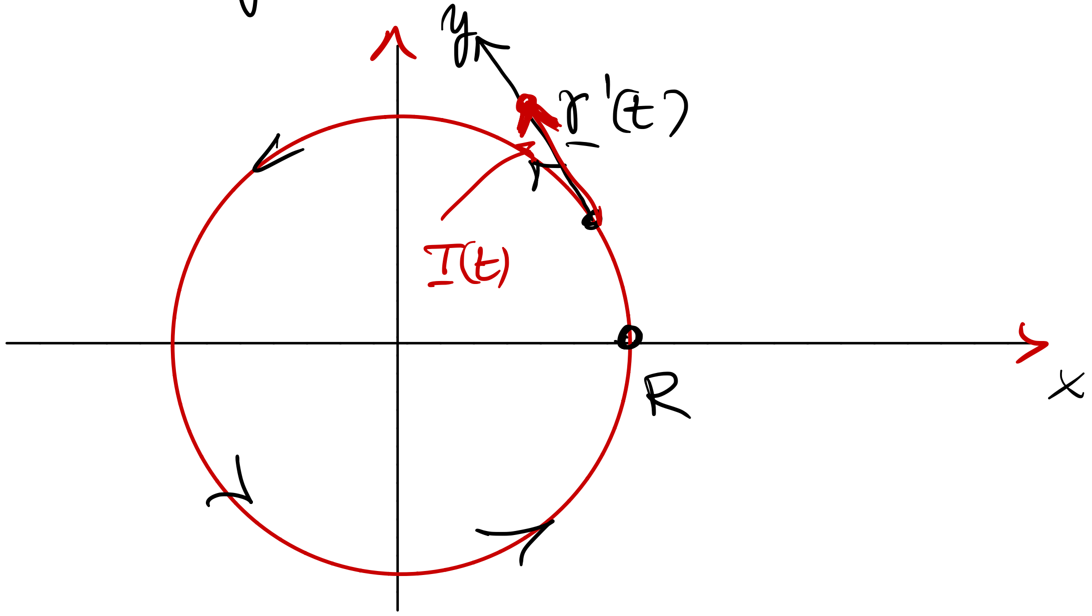
La cond^{ne} 2) richiede che il punto $\gamma(t)$ "non si fermi mai"

Esempi: Circonferenza $\quad R>0$ fissato

$$\underline{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t) \qquad t\in[0,2\pi].$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t) \neq \underline{0}$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2 > 0$$



Si definisce il versore tangente alla curva:

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \right)$$

oss $\neq 0$ per l'hyp. 2)

Nel caso della circonferenza

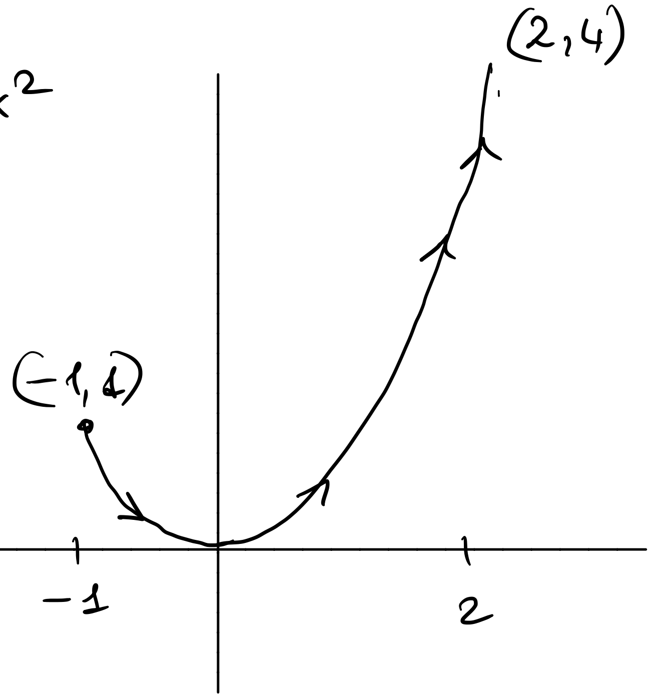
$$\underline{T}(t) = \frac{(-R\sin t, R\cos t)}{R} = (-\sin t, \cos t)$$

Esempio: $\underline{\gamma}(t) = (t, t^2) \qquad t \in [-1, 2]$

$$\underline{\gamma} \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad y = x^2$$

$$\underline{\gamma}'(t) = (1, 2t) \neq \underline{0}$$

$$\underline{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$



Questo è un caso particolare di una curva grafico.

$$\underline{\gamma}(t) = (t, f(t)) \qquad t \in I$$

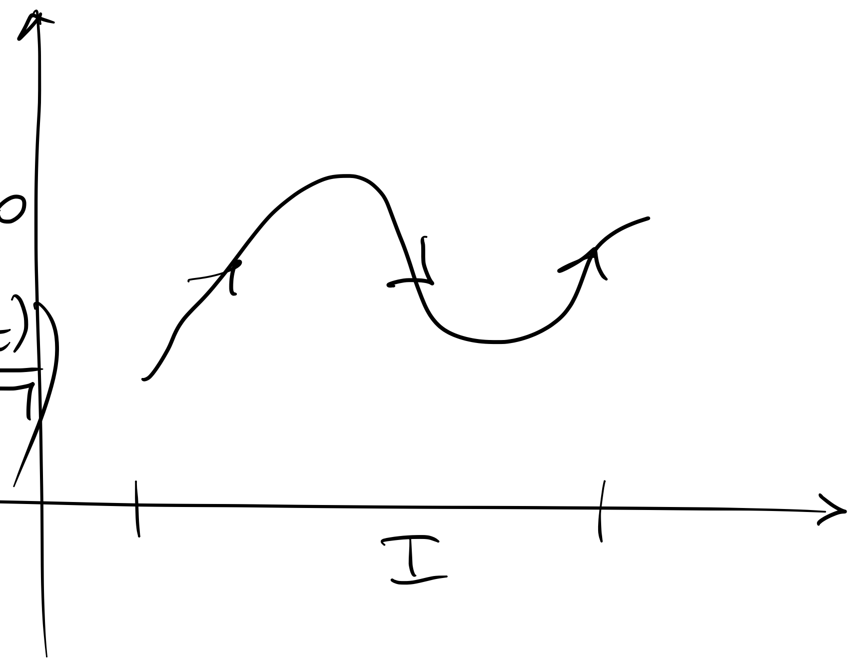
$f: I \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$

è una curva che "percorre" il grafico di f

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

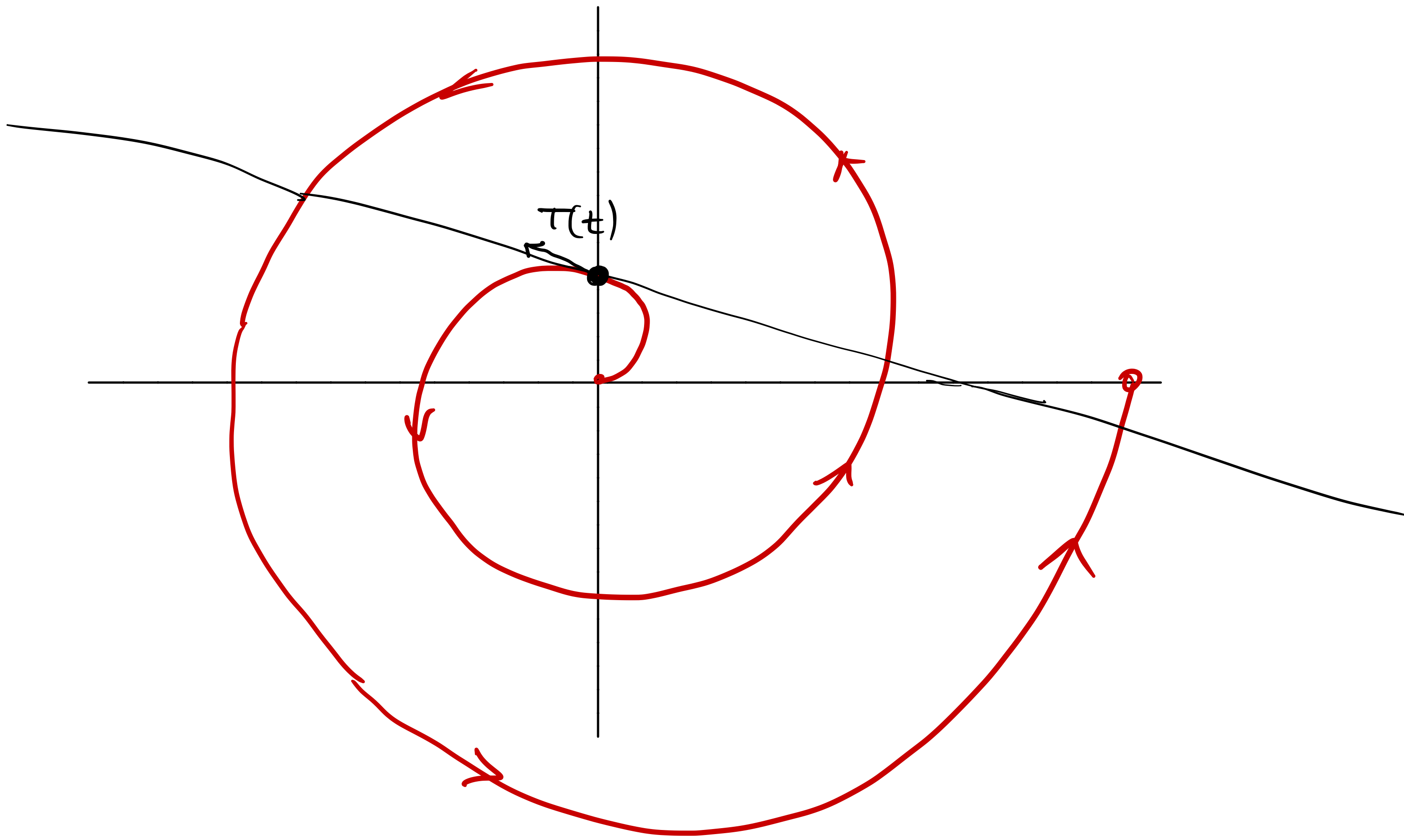
$$\underline{\gamma}'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$$

$$\underline{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{\;}} \right)$$



$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Spirale di Archimede



Trovare il versore e la retta tangente a γ nel pto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

1ª domanda: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \in$ sostegno della curva?

si, corrisponde a $t = \frac{\pi}{2}$

2) $\underline{\gamma}'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t,\ \mathrm{sen}\,t + t\cos t)$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right). \Rightarrow T(t) = \frac{\left(-\pi/2, 1\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1}}$$

3°) retta tangente:

Si tratta di scrivere la retta passante per $P_0\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ e parallela a $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2},1\right)=\underline{V}$

a) Equazioni parametriche

$$x = x_0 + t\,\cancel{v_1}\;x'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = y_0 + t\,\cancel{v_2}\;y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{P} = \underline{P_0} + t\,\underline{V} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Nel nostro caso: eq^{ni} parametriche della retta tg a γ in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} x = 0 + t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}t \\ y = \frac{\pi}{2} + t\cdot 1 = \frac{\pi}{2}+t \end{cases}$$

Eq^{ni} parametriche della retta tg.

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2}t \\ y = \frac{\pi}{2}+t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Eq^{ne} cartesiana dalla retta (si elimina t)

$$y = \frac{\pi}{2}+t = \frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}x$$

In generale, se $\underline{\gamma}(t)$ è una curva regolare, allora la retta tangente alla curva in

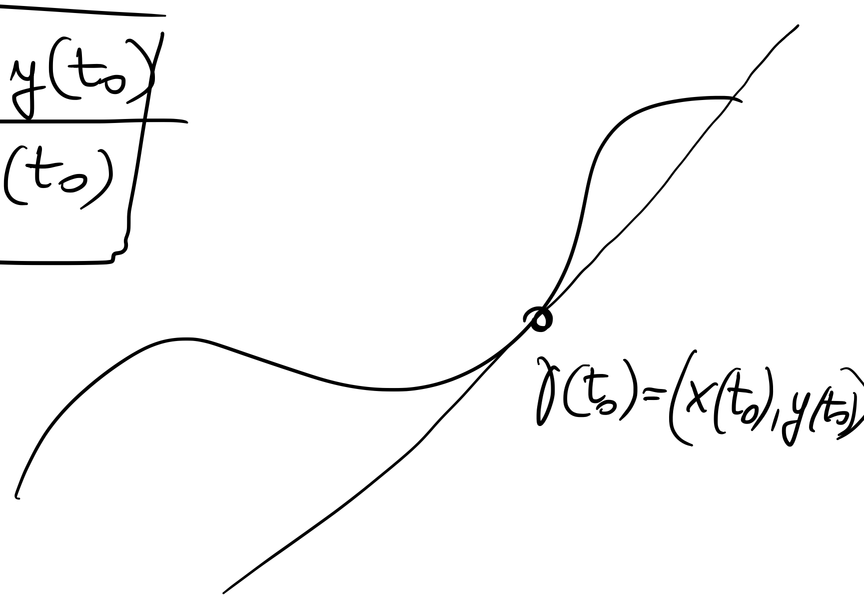
$$\underline{\gamma}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) \qquad (\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)))$$

ha eq^{ni} parametriche

$$\begin{cases} x = x(t_0) + t\, x'(t_0) \\ y = y(t_0) + t\, y'(t_0) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

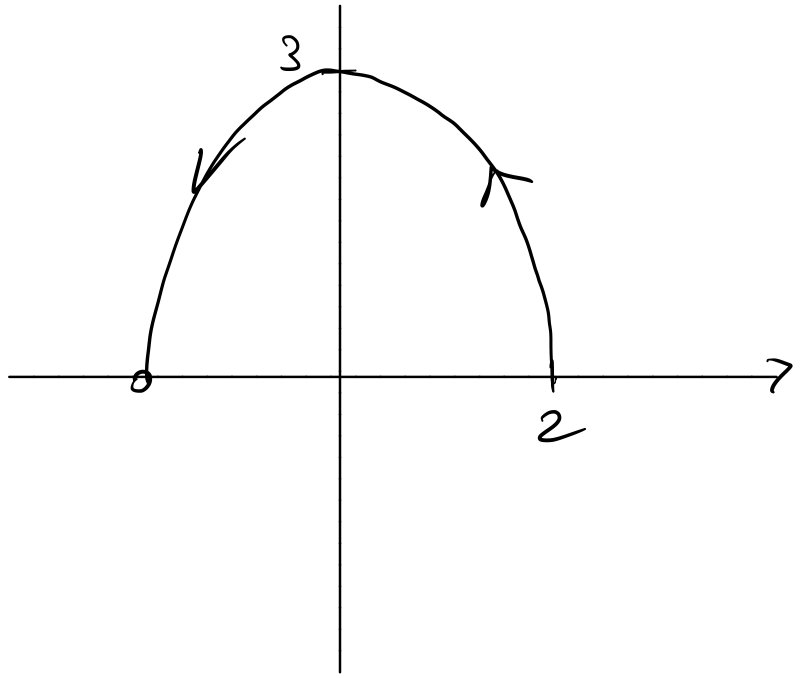
ed eq^{ne} cartesiana

$$\boxed{\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}}$$



Consideriamo la "mezza ellisse"

$$\underline{\gamma}(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\,t) \qquad t \in [0, \pi].$$



Verificare che è una curva regolare e calcolare versore tg e retta tg nel pto $P_0\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\underline{\gamma}(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\,t)$$

$$\underline{\gamma}'(t) = (-2\,\text{sen}\,t, 3\cos t)$$ non si annulla mai.

P_0 corrisponde
$$\begin{cases} 2\cos t_0 = 1 \\ 3\,\text{sen}\,t_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos t_0 = 1/2 \\ \text{sen}\,t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\underline{\gamma}'(t_0) = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow T(t_0) = \left(\frac{-\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}\right)$$

Eq^{ne} cartesiana della retta tg.

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

$$-\frac{x - 1}{\sqrt{3}} = \frac{\left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{3} \, 2$$

Perché si richiede $\underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$?

Perché in questo modo è definito il versore tangente ed è definita la retta tangente. Se ciò non accade si possono avere dei p.ti "non regolari".

<u>Esempio 1</u>

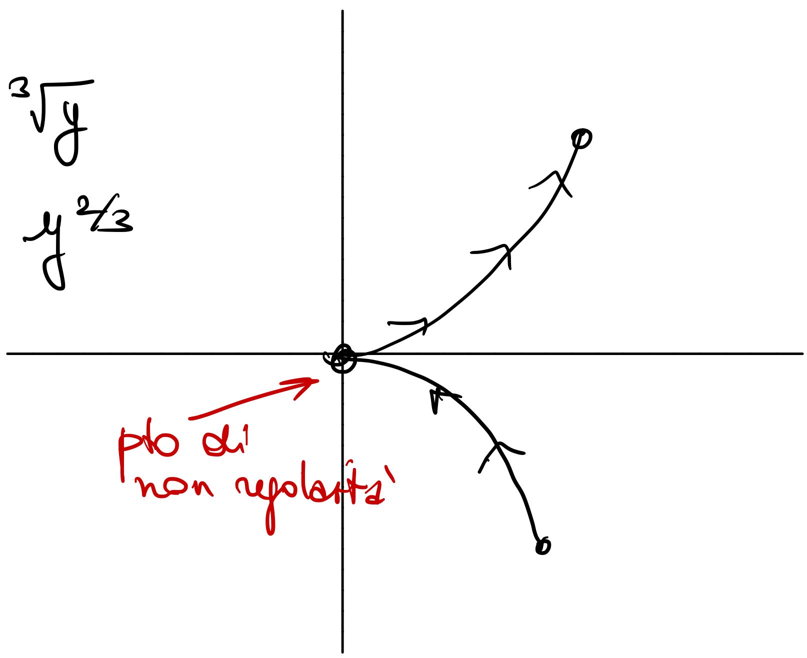
$$\underline{\gamma}(t) = \left(t^2, t^3\right) \qquad t \in [-1, 1].$$

ovviamente $\gamma \in C^1$

$\gamma'(t) = \left(2t, 3t^2\right)$ si annulla in $t_0 = 0$.

Proviamo a disegnarla

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{y} \qquad x = y^{2/3}$$

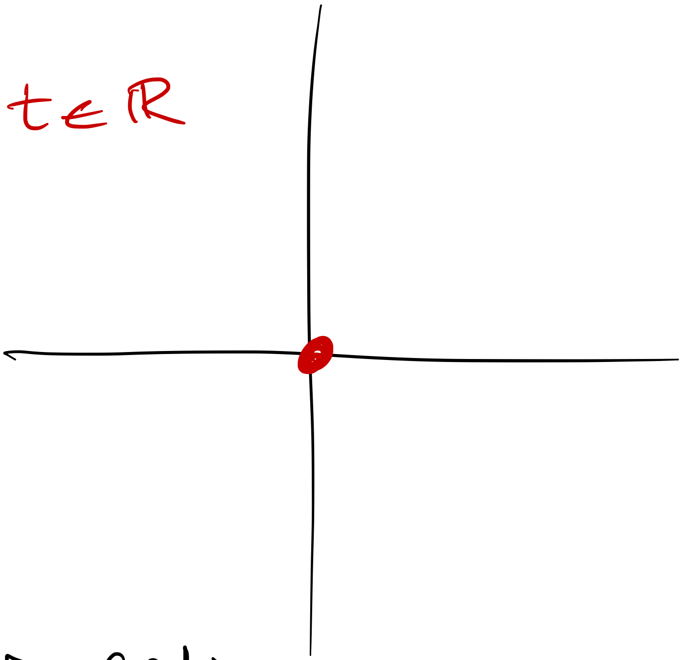


Esempio 2

$$\gamma(t) = (0,0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

E' un solo pto.



Nel caso di una curva grafico

$y = f(x)$, cioè $\gamma \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $\quad t \in I$

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$

Retta tangente a γ in $(\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{t_0}}, f(t_0))$

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

cioè $\quad (x_0 = t_0)$

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

coincide con l'usuale retta tangente.

Definizione: Sia $\underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ di classe $C^1([a,b])$ $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$.

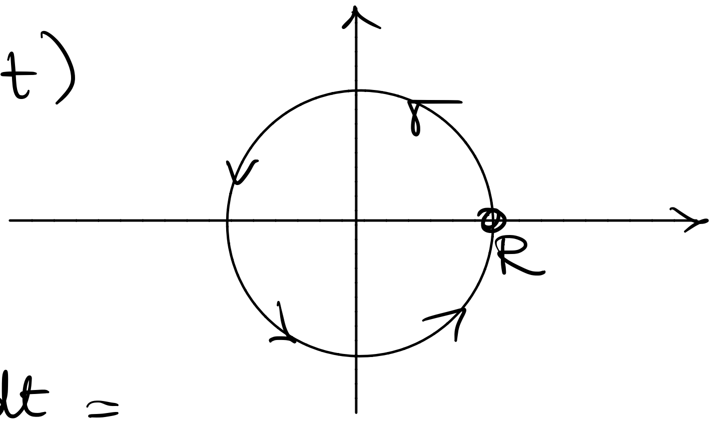
Definiamo lunghezza di γ

$$L(\gamma) = \int_a^b |\underline{\gamma}'(t)| \, dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}_{\text{Continua in } [a,b]} \, dt$$

Esempio: Lunghezza di una circonferenza. $(R > 0)$

$$\underline{\gamma}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{\gamma}'(t) = (-R\,\mathrm{sen}\, t, R\cos t)$$



$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \mathrm{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R$$

Lunghezza di un'ellisse

$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

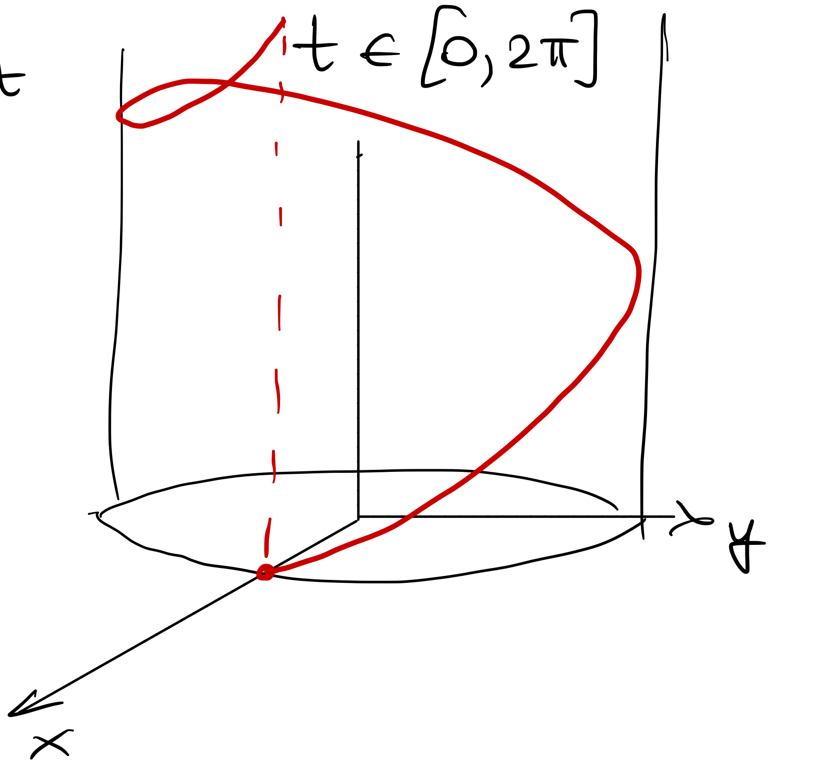
$$\gamma'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t)$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 5\cos^2 t}\, dt$$

è un "integrale ellittico".

Lunghezza di una elica cilindrica $R>0,\ a>0$

$$\gamma \quad \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = at \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

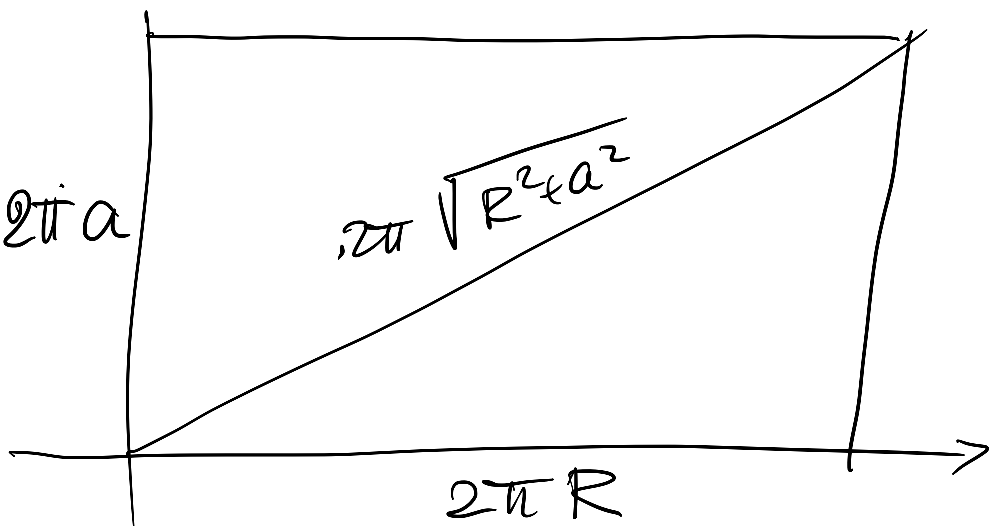


$$x'(t) = -R\sin t$$
$$y'(t) = R\cos t$$
$$z'(t) = a$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2+a^2}.$$

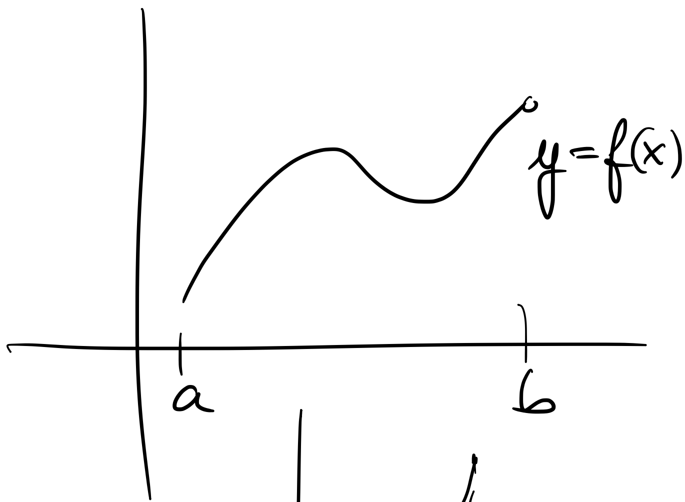
Infatti, "srotolando il cilindro"



Lunghezza di una curva grafico.

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad t \in [a,b]$$

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$



$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Esempio: Lunghezza di una parabola $y = x^2$

$x \in [0,b]$

sost. $(u = 2x)$ poi per parti

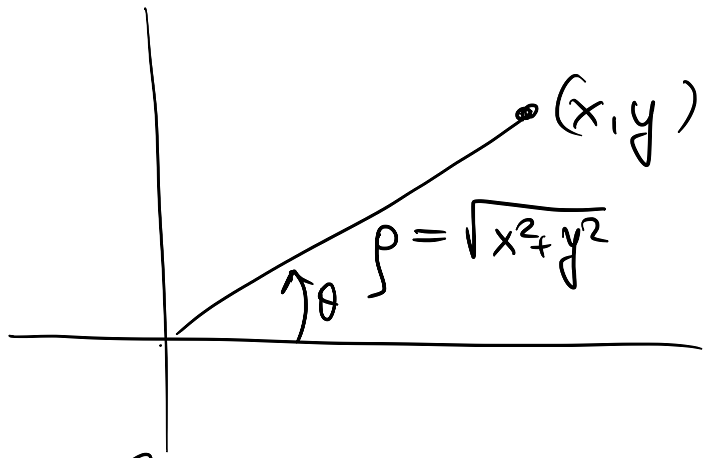
$$L(\gamma) = \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \dots$$

$$\dots = x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\Big|_0^b =$$

$$= b\sqrt{1+4b^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2b + \sqrt{1+4b^2}\right)$$

Lunghezza di una curva in coord. polari.

Per esempio: spirale



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Potrei prendere $\rho = \rho(\theta)$

Spirale archimedea : $\rho = a\theta$

$$\begin{cases} x(\theta) = a\theta\cos\theta \\ y(\theta) = a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

In generale se prendo $\rho = \rho(\theta)$ avrò una curva della forma

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Spirale logaritmica $\qquad \underline{\rho(\theta) = e^{\theta}}$

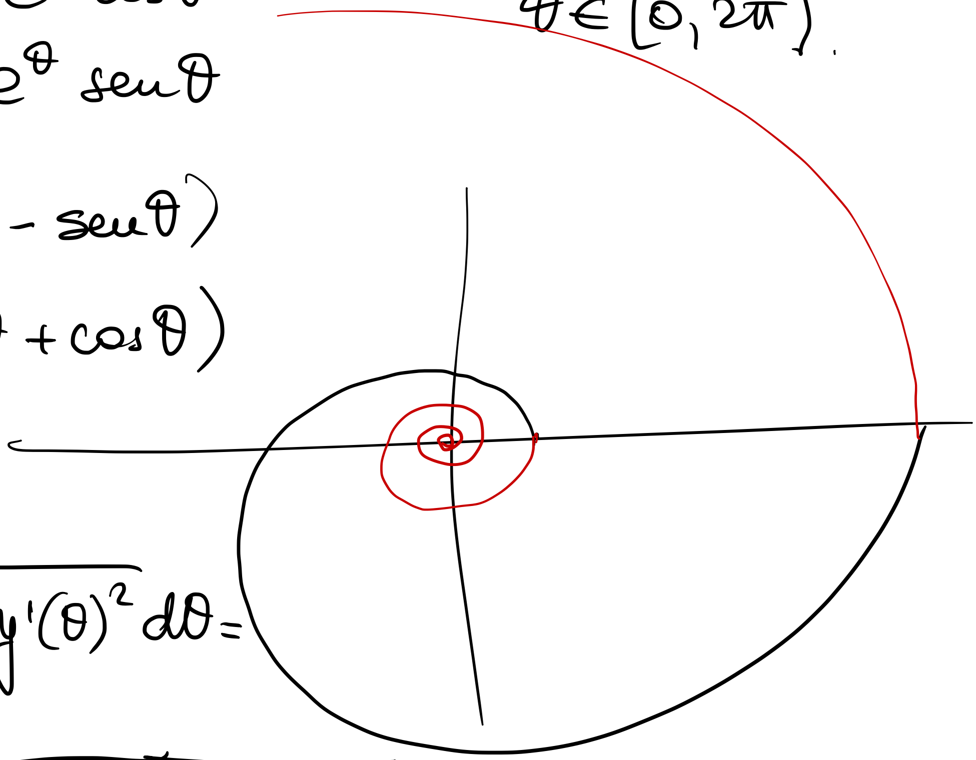
Spirale logaritmica

$$\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$.

$$x'(\theta) = e^{\theta}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$y'(\theta) = e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$



$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\theta} \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cancel{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \cancel{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$