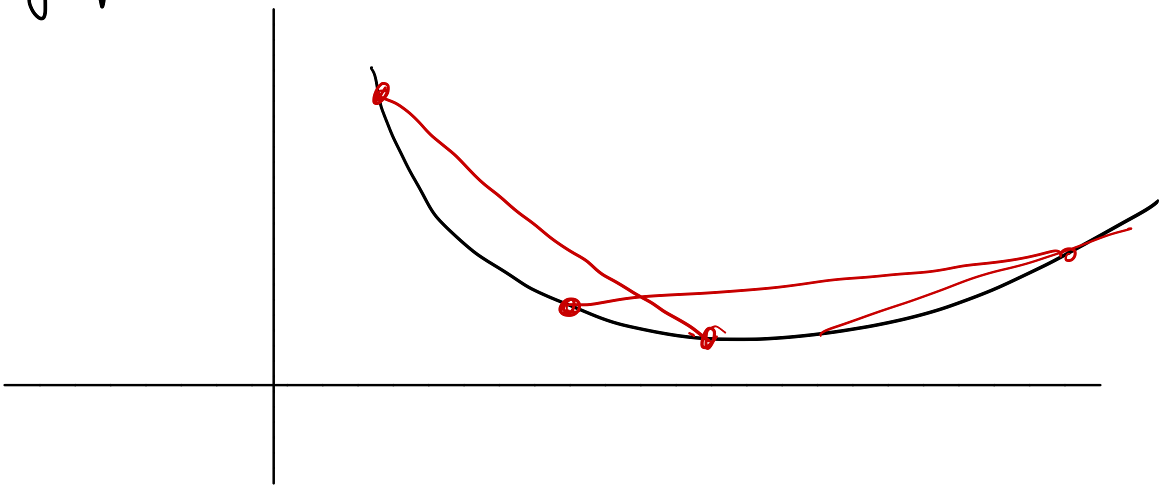
Esercitazione facoltativa - Mercoledì 15:00 - 16:00
Aula Amaldi.

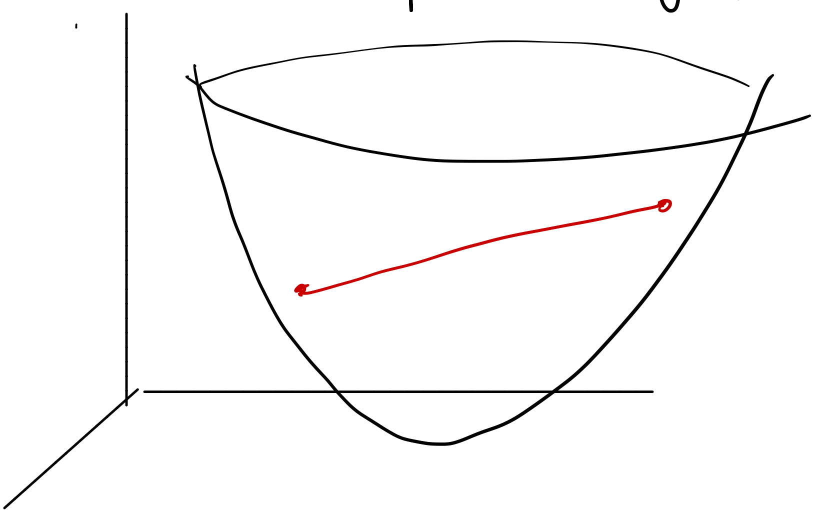
Interpretazione geometrica del "segno" della matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$.

Anche in due o più variabili le derivate seconde sono legate alla convessità/concavità del grafico della funzione

In 1 variabile f si dice convessa se ogni corda tracciata tra punti del grafico giace al di sopra del grafico



Anche in due variabili una $f(x,y)$ si dice convessa se ogni corda tracciata tra pti del grafico si trova al di sopra del grafico stesso



TEOREMA $f \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto,

allora

f è convessa in A $\iff$ $D^2 f(x,y)$ è semidef^{ta} positiva $\forall (x,y) \in A$.

concava

negativa.

Formula di Taylor.

dim. 1. $\quad f \in C^n(I) \quad x_0 \in I.$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

per $x \to x_0$

In dim 2. diventa. $f \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ $(x_0,y_0) \in A$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0,\, y-y_0)} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \underbrace{\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \Big]}_{\left(D^2 f(x_0,y_0)(x-x_0,\, y-y_0),\ (x-x_0,\, y-y_0)\right)}$$

$$+ \quad o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)$$

per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di

$$f(x,y) = \sqrt{1+xy} \quad \text{con pto iniziale } (x_0,y_0)=(2,4)$$

$$f(2,4) = 3$$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{1+xy}} \qquad f_x(2,4) = \frac{2}{3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{1+xy}} \qquad f_y(2,4) = \frac{1}{3}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{y}{(1+xy)^{3/2}} = -\frac{y^2}{4(1+xy)^{3/2}}$$

$$f_{xx}(2,4) = -\frac{4}{27}$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{4(1+xy)^{3/2}} \qquad f_{yy}(2,4) = -\frac{1}{27}.$$

$$f_{xy}(x,y) = \overset{\text{esercizio}}{\dots} = \frac{2+xy}{4(1+xy)^{3/2}} \qquad f_{xy}(2,4) = \frac{10}{4\cdot 27}$$

$$= \frac{5}{54}.$$

$$\sqrt{1+xy} = 3 + \frac{2}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-4) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{27}(x-2)^2 + \frac{5}{27}(x-2)(y-4) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{27}(y-4)^2 \right] + o\left[(x-2)^2 + (y-4)^2\right]$$

per $(x,y) \to (2,4)$.

Curve (del piano, dello spazio)

E' un "oggetto" intrinsecamente uni-dimensionale "immersa" in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

DEF. Si dice curva una funzione

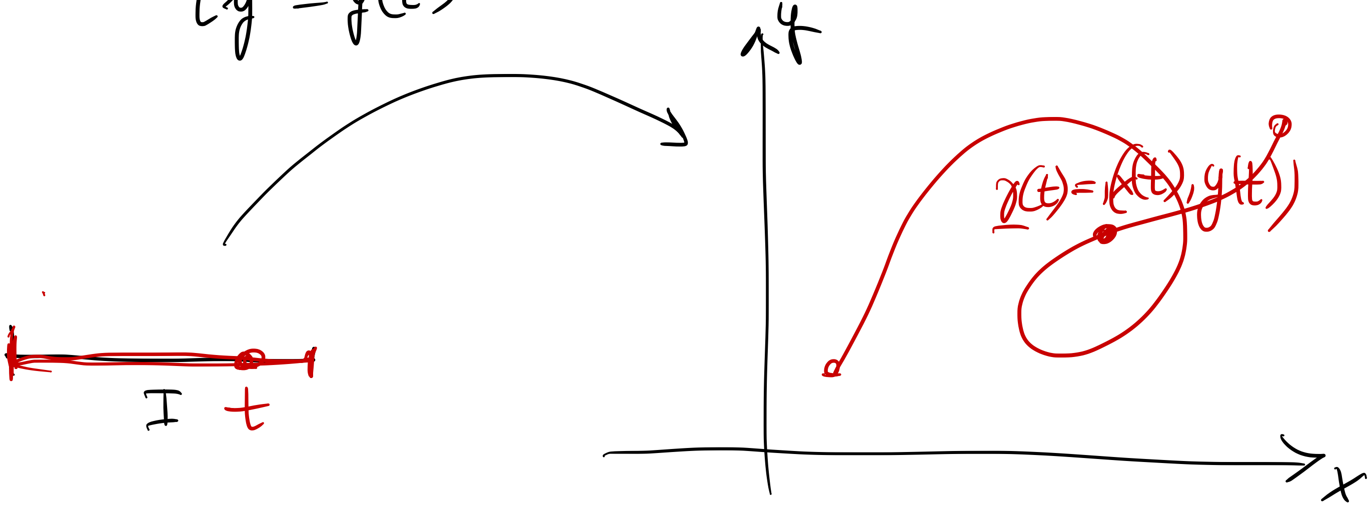
$$\underline{\gamma} \text{ da } I \subset \mathbb{R} \text{ a } \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^3)$$

intervallo

$$t \in I \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$$

Questo corrisponde a dare <u>due</u> funzioni reali $x(t)$, $y(t)$ definite in I.

$$\gamma \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \text{eq}^{\text{ni}} \text{ parametriche della curva}$$



Esempio

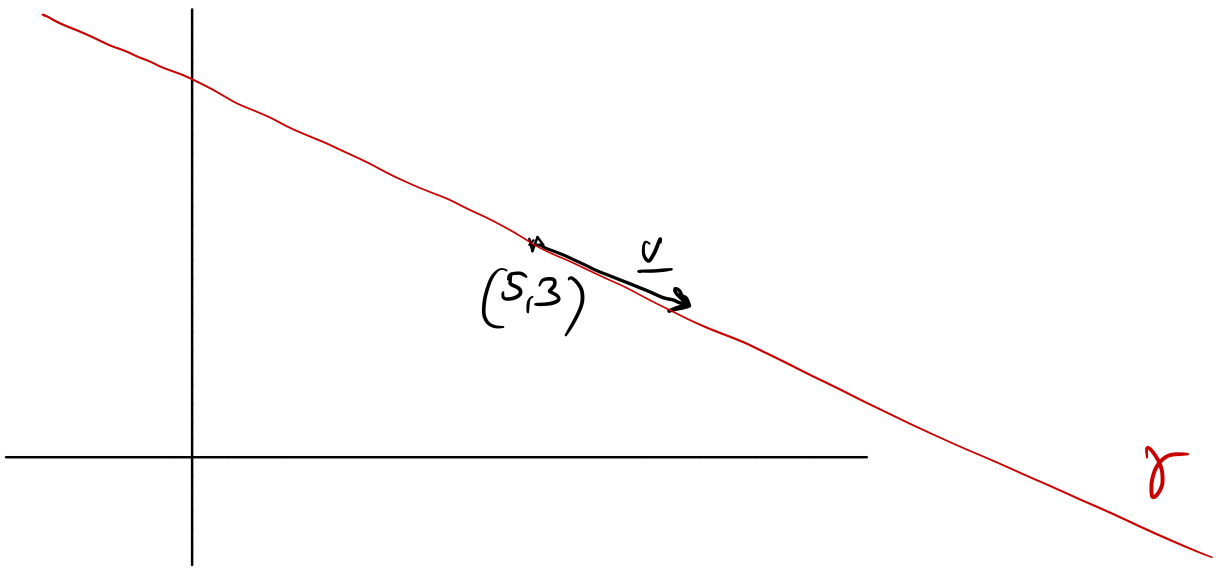
$$\underline{\gamma}(t) = (5+2t, 3-t) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 3-t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$x = 5 + 6 - 2y$

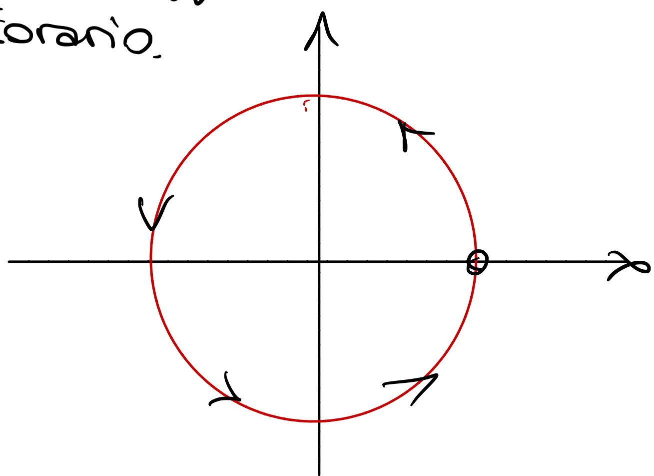
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

E' la retta che passa per il pto $(5,3)$ e parallela al vettore $\underline{v}(2,-1)$



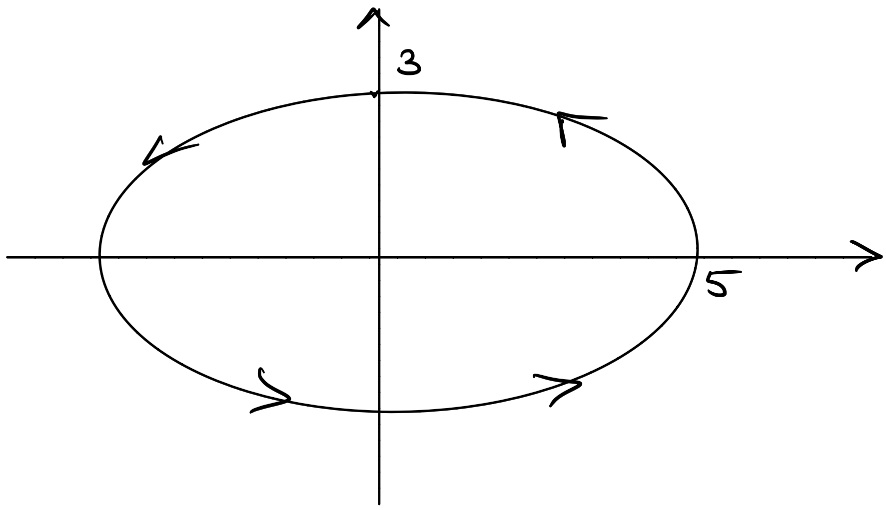
$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

circ. di centro $(0,0)$ e raggio 5, percorsa 1 volta in verso antiorario.



$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

ellisse



$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

E' il grafico della funzione f.